序

本书在編写过程中，参考了下列书籍：

陈家賢編：三角学(測繪学院中等科讲义)；

邓茹刚編：球面三角(測繪丛书)；

李光蔭編：球面三角术；

Ф. Ф. 巴甫洛夫和 В. П. 馬希克維奇著：球面三角学(刘亚星譯)；

М. К. ВЕНТЦЕЛЬ: Сферическая тригонометрия;

Н. Н. СТЕПАНОВА: Сферическая тригонометрия;

徐韞知編：球面三角法球面几何学合編。

其中尤以陈家賢、邓茹刚二同志所編的书及巴甫洛夫和馬希克維奇所著的书为主要依据。

本书是針对測量学上的应用而編写的，凡是与測量学无关的材料，都沒有列入。同时，为了不使本书篇幅过大而能用很短的时間把它学完，在理論闡述和文字叙述方面，力求簡单明确，而且尽可能地利用直观的和平面三角学的知識来証明定理和公式，尽量避免高深的数学理論和多余的严格性，而着重于实际运算。因此，本书适合于工业大学測量专业和中等測量技术学校教学参考之用；对于社会上的广大測繪工作者，也有参考价值。

本书共分五章，第一章介紹球面三角形的几何性质；第二章是推証球面三角形边和角的各种公式(函数关系)；第三章是用实例来叙述球面三角形的解法；第四章为直角球面三角形，第五章是球面三角形的面积和球面角超的各种公式的推証及运算。如果按照运算的繁簡，直角球面三角形应放在任意球面三角形之前，但考慮到直角球面三角形只不过是任意球面三角形的一个特例，因此本

书把它放在任意球面三角形之后，这可以大大精简篇幅和减少讀者的学习时間。

本书每章都附有习題，这些习題一般說来是实用的，也是不太困难的。

本书在編写过程中，得到編者所在数学教研組同志們的指导和帮助，謹此致谢。

由于編者的数学和測量学知識都很差，更缺乏实际工作經驗，这本书的缺点和錯誤是很多的，但本着敢想敢干的精神，还是使这本书与讀者見面了，希望讀者提出意見，以便改进。

編　者

1958.10.12 于北京

目录

引　言

球面上三个大圓弧所构成的閉合图形，叫做球面三角形。球面三角学就是研究球面三角形的解法，也就是說，依照球面三角形的已知元素(边、角)，来解算其他未知元素。无論在理論上或者在实用上，球面三角学都有重要的价值；如在天文学和测量制图学等方面都有广泛的应用，因为天球和地球虽然不是真正的球形，但在符合一定要求的条件下，我們常把天球和地球看作圓球，于是在天文学和测量制图学中有很多問題，是应用球面三角学来解决的。

根据历史考察，球面三角学比平面三角学要出现得早一些。当球面三角形的球半徑变为无穷大时，这球面三角形就变为平面三角形了。然而，球面三角学与平面三角学还是有所不同的；如球面三角形的边，为研究便利起見，我們用角度来表示，而平面三角形的边，以长度为单位；又如当球的半徑一定时，知道了球面三角形的三个角，便可确定这球面三角形的三个边，而平面三角形則沒有这样的性质。

本书在研究球面三角学时，引用到平面三角学的一些基本公式，如 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$, $\sin 2A=2\sin A\cos A$, $\cos A-\cos B=$ $=-2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$等等。这并不是說平面三角的公式与球面三角的公式可以通用，这是因为在平面三角学中的公式有恒等式和条件等式两种，前者如上面所提到的那些公式，系仅就某一元素或者两个元素的恒等关系式而言，根本与三角形沒有关系，当然可以应用到球面三角学中来；后者如正弦公式、余弦公式等等，是平面三角所特有的公式，不可应用到球面三角学中来。

第一章　球面三角形的几何性質

§1. 球面上两点之間的距离

球面上的圓　在高中的立体几何学中，我們已經知道，通过球心的平面截球所得的截口是一个圓，它叫做大圓。不过球心的平面截球所得的截口也是一个圓，它叫做小圓。显然，大圓把球面分成相等的两部分。而通过球面上不在同一直徑两端的两个点，能作并且只能作一个大圓(图 1)。

球面上两点間的距离　球面上两点 A, B 間大圓弧(劣弧)的长叫做球面上两点 A, B 間的距离，通常以AB来記它。

我們可以証明：在球面上連接 A, B 两点的所有曲綫(弧)之长以距离 AB 为最短。

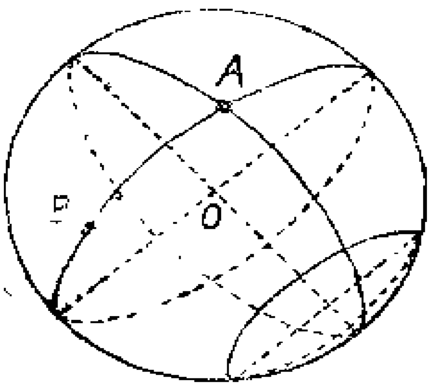


图 1.

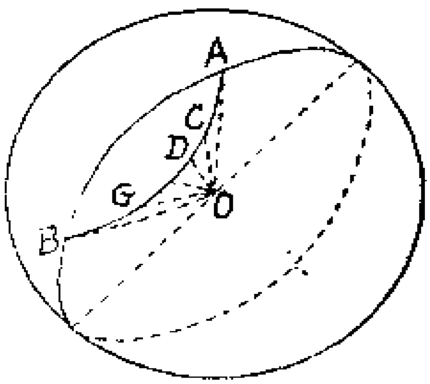


图 2.

事实上，过 A, B 两点作任意曲綫弧 $ACD\cdots\cdots GB$(图 2)，而以 C, D, $\cdots\cdots$, G 各点分这曲綫弧为无穷多个无穷小的弧 AC, CD, $\cdots\cdots$, GB。由于这些弧非常小，我們可以把它們看作是大圓弧。把 A, C, D, $\cdots\cdots G$, B 各点与球心 O 联結起来，于是我們便得到多面角 $O-ACD\cdots\cdots GB$。由立体几何知：

$$\text{平面角}\ \angle AOB < \angle AOC + \angle COD + \cdots\cdots + \angle GOB,$$

由于圓的中心角与所对的圓弧同度，有：

$$\text{圓弧 } AB < AC + CD + \cdots\cdots + GB,$$

即 $$\text{大圓弧 } AB < \text{曲綫弧长 } ACD\cdots\cdots GB.$$

这就是說，連接两点 A, B 的所有曲綫弧之长，以距离 AB 为最短[①]。

§2. 球面上的圓的极

設球面上一已知圓（不論大圓或小圓），垂直于这已知圓所在平面的球直徑的端点，叫做这个圓的极。

如图 3 中，圓 AB 的极是 P 与 P'，圓 CD 之极也是 P 与 P'；这就是說，P 和 P' 既是圓 AB 之极，也是圓 CD 之极。同时可以看出，一个圓有两个极，而这两个极的連綫就是球的直徑。

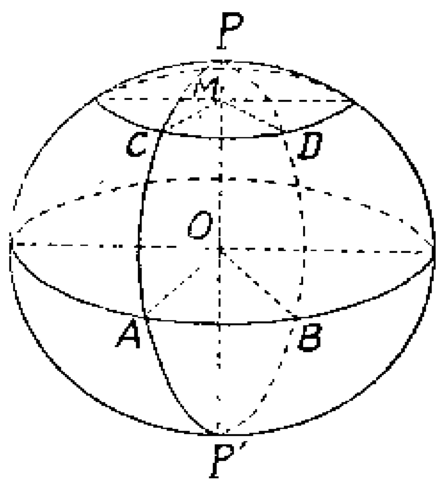


图 3.

球面上某一个圓的极到这个圓周上任一点的距离，称为极距离。

可以証明：极到圓周上各点的距离都是相等的。

事实上，如图 3，設 CD 之极为 P 与 P'，直徑 PP' 交圓平面于 M，則两个平面直角三角形 PMC 和 PMD 就全等。因此

$$\text{弦 } PC = \text{弦 } PD.$$

由于等圓內弦等則弧等，故

$$PC = PD.$$

同理 $$P'C = P'D.$$

这就証明了极到圓周上各点的距离是相等的。

关于圓的极，我們还有下列重要定理。

---

①用微分几何中的大地綫原理来証明这个命題，則更为清楚。

定理 I 大圓的极距离为一象限($=90°$)。反之，如果球面上一点至其他两点(不是直徑的端点)的距离都是一象限，則前一点必为通过后两点的大圓之极。

証 由图 3，对于大圓 AB，我們有

$$\angle POA=\angle P'OA=\angle POB=\angle P'OB=90°,$$

由于圓的中心角与所对之弧同度，故

$$PA=P'A=PB=P'B=90°.$$

逆定理的証明：因为

$$PA=PB=90°,$$

$$\therefore \quad \angle POA=\angle POB=90°.$$

因之 PO 垂直大圓AB之平面，卽 P 为大圓 AB 之极。

§3. 球面角与球面三角形

球面角 两大圓相交所成之角，叫做球面角，其交点叫做球面角的頂点，大圓弧叫做这球面角的边。如图 4 中，球面角APB 与 $AP'B$（簡記为球面角P与P'）的頂点为P与P'，而 PAP'，PBP' 为其边。一般，球面角是以过頂点的圓弧的二切綫所夹的角来度量的。

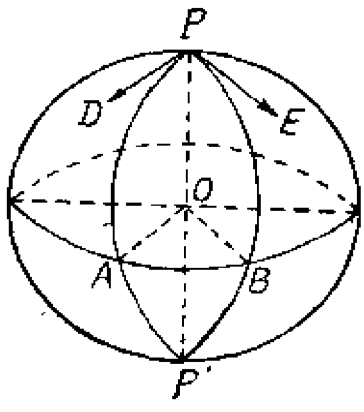


图 4.

在图 4 中，設以P为极的大圓与球面角之边交于 A,B，过P作 PA,PB 的切綫 PD,PE，則有

$$\angle DPE=\angle AOB,$$

卽 $\qquad$ 球面角$P=AB$.

这就是說，球面角与以其頂点为极而夹在两边間的大圓弧同度.

球面三角形 球面上相交于三点的三个大圓弧所圍成的球面上的一部分，叫做球面三角形。这三个大圓弧叫做球面三角形的

边。通常用小写拉丁字母 a, b, c 来表示。各大圆弧所成的球面角，叫做球面三角形的角，通常用大写拉丁字母 A, B, C 来表示。这三个边与三个角統称为球面三角形的六个元素。

将球面三角形 ABC 的各頂点与球心 O 連結，則构成球心三面角 $O—ABC$（图 5）。显然由于圓的中心角与所对的弧同度，有

$$a = \angle BOC,$$
$$b = \angle AOC,$$
$$c = \angle AOB,$$

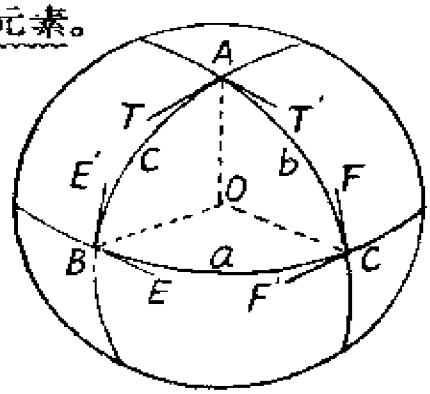


图 5.

又 $A = \angle TAT'$, $B = \angle EBE'$, $C = \angle FCF'$.

这就是說，球面三角形的边与所对应的球心三面角之面角同度，而球面三角形的角与球心三面角的二面角同度。

今后，为了方便和切合实用，我們所討論的球面三角形，其边与角都限于小于 180°。

§4. 极三角形

設球面三角形 ABC 各边 a, b, c 的极分别为 A', B', C'（图6）；且 AA', BB', CC' 都小于 90°；过 A', B', C' 作大圓弧构成另一个球面三角形 $A'B'C'$，則这个球面三角形 $A'B'C'$ 叫做原球面三角形 ABC 的极三角形。

因为 B' 为 b 之极，C' 为 c 之极，由 §2 定理 I 的正定理得 $AB' = 90°$, $AC' = 90°$；从而再根据定理 I 的逆定理知：A 为 $B'C' = a'$ 之极（图 7），且 $\widehat{AA'} < 90°$。

同理，B 为 $C'A' = b'$ 之极，且 $BB' < 90°$；C 为 $A'B' = c'$ 之极，且 $CC' < 90°$。

由此可知，球面三角形 ABC 也是球面三角形 $A'B'C'$ 之极三



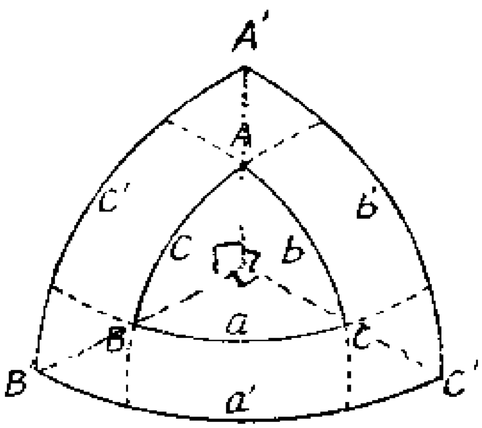


图 6.

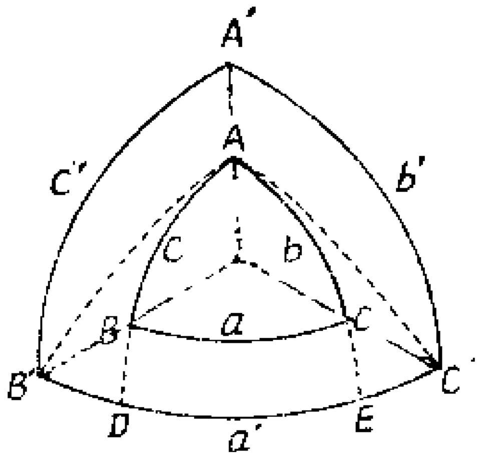


图 7.

角形。因之，我們有下列定理：

定理Ⅱ 若此球面三角形为彼球面三角形的极三角形，則彼球面三角形也为此球面三角形的极三角形。

又在图 7 中，延长 AB, AC 交 $B'C'$ 于 D, E，則有

$$a'+A=a'+DE \qquad (\because A \text{ 为 } a' \text{ 之极})$$
$$=B'D+DE+EC'+DE$$
$$=B'E+DC'$$
$$=90°+90° (\because B' \text{ 为 } AE \text{ 之极}, C' \text{ 为 } AD \text{ 之极, 据定理 I})$$
$$=180°.$$

同理：

$$b'+B=180°, \qquad c'+C=180°.$$

因之得

定理Ⅲ 极三角形的边与原三角形之对应角互补。同时由定理Ⅱ可以看出，极三角形的角与原三角形之对应边互补。

§5. 球面三角形的边和角的基本性質

性質 1 球面三角形两边之和大于第三边。

証　設球面三角形 ABC，将它的頂点与球心連結(图 8)，由立体几何知識，三面角的两个面角的和大于第三面角，即

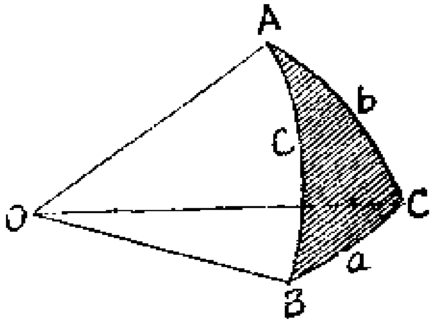


图 8.

$$\angle AOB+\angle BOC>\angle AOC.$$

故　　$$c+a>b.$$

同理：　$a+b>c,\qquad b+c>a.$

推論　球面三角形两边之差小于第三边。

性質 II　球面三角形三边之和大于 $0°$ 而小于 $360°$。

証　因为 $a, b, c>0$，故 $a+b+c>0$。又因为由立体几何中凸多面角各面角之和小于 $360°$，故

$$\angle AOB+\angle BOC+\angle COA<360°,$$

因之　　$$c+a+b<360°.$$

性質 III　球面三角形三角之和大于 $180°$ 而小于 $540°$。

証　我們来考察球面三角形 ABC 的极三角形 $A'B'C'$ (图7)，由定理 II 知

$$a'+A=180°,\quad b'+B=180°,\quad c'+C=180°.$$

然而由性質 II 知

$$0°<a'+b'+c'<360°,$$

将 $a'=180°-A,\ b'=180°-B,\ c'=180°-C$ 代入上式，則得

$$0°<180°-A+180°-B+180°-C<360°,$$

即　　$$180°<A+B+C<540°.$$

性質 IV　球面三角形的两角之和減第三角小于 $180°$。

証　因为由性質 I 知

$$a'+b'>c',$$

$\therefore$　　$$180°-A+180°-B>180°-C,$$

即　　$$A+B-C<180°.$$

同理：　$A+C-B<180°,\qquad B+C-A<180°.$

性質 V 若球面三角形的两边相等，則这两边的对角也相等。反之，若两角相等，則这两角的对边也相等。

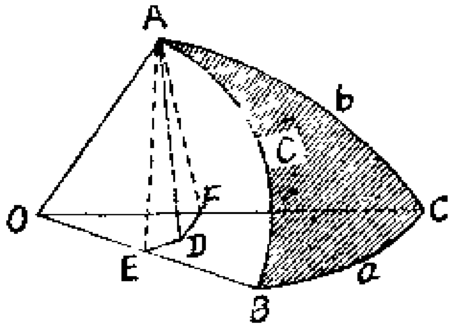


图 9.

証 (1)設球面三角形 ABC 中，$b=c$。过 A 作平面 OBC 的垂綫交平面于 D，再过 D 引 OB OC 的垂綫 DE，DF：由于

$\angle AOE=\angle AOF$，($\because b=c$)

則　平面rt.$\triangle AEO\cong$平面rt.$\triangle AFO$，

$\therefore$　　$AE=AF$.

因而　　平面 rt.$\triangle ADE\cong$平面 rt.$\triangle ADF$，

$\therefore$　　$\angle AED=\angle AFD$.

即　　$B=C$.

(2)若 $B=C$，則由定理 Ⅲ（考察$\triangle ABC$ 之极三角形）知

$$b'=c'.$$

于是根据(1)的証明

$$B'=C'.$$

再根据定理 Ⅲ，得

$$b=c.$$

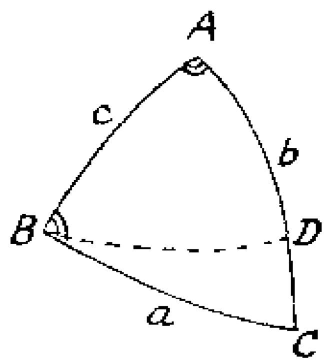


图 10.

性質 VI 球面三角形中，大角对大边，大边对大角。

証 (1)設在球面三角形 ABC 中，$B>A$（图 10）。作球面角$\angle ABD$，使其等于 A，則由性質 V，

$$AD=BD.$$

因之，根据性質 I，有

$$b=AD+DC=BD+DC>a.$$

(2)設 $b>a$，我們来求証 $B>A$，为了証明这点，采用反証法。

假定 $B\not>A$，則必$B<A$ 或 $B=A$，于是根据(1)之証明和性質 V，必有 $b<a$ 或 $b=a$，这都与原設条件 $b>a$ 矛盾，所以当 $b>a$ 时，

必有 $B>A$。

以上所談的只不过是球面三角形边和角的几个主要性質，对于边和角的其他一些性質，这里就不研究了。

例 求証 $\cos(P-A)>0$，此处 $P=\frac{1}{2}(A+B+C)$.

証 由性質Ⅳ，知 $P-A=\frac{1}{2}(B+C-A)<90°$。又由性質Ⅲ，$A+B+C>180°$，但 $2A<360°$.将这二不等式相减，得 $B+C-A>-180°$，或 $P-A=\frac{1}{2}(B+C-A)>-90°$。这就是說：

$$-90°<P-A<90°,$$

因之

$$\cos(P-A)>0.$$

§6. 全等球面三角形

在同球或等球上，两球面三角形的对应边和角分别相等，而且排列顺序相同，則称这两个球面三角形全等。

定理Ⅳ 在同球或等球上两个球面三角形，有下列条件之一，且相等部分排列顺序相同，則这两个球面三角形全等：

1. 两边及其夹角彼此相等。
2. 两角及其夹边彼此相等。
3. 三边彼此相等。
4. 三角彼此相等。

証 前三种情况可用重迭法从球心三面角之全等推出，这里就不必詳加叙述了。至于第四种情况，需要借助于极三角形而加以証明。現在証明如下：

設在球面三角形 ABC, DEF 中，已知

$$A=D,\quad B=E,\quad C=F.$$

且排列顺序相同，作它們的极三角形 $A'B'C'$, $D'E'F'$（图 11），則根

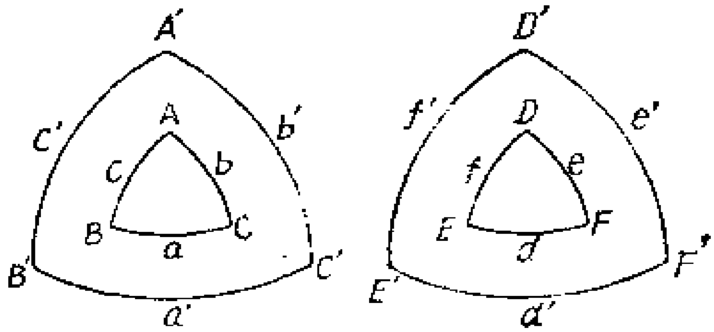


图 11.

据定理Ⅲ，有

$$A+a'=180°=D+d',$$
$$B+b'=180°=E+e',$$
$$C+c'=180°=F+f'.$$

因为 $A=D,\ \ B=E,\ \ C=F$，所以

$$a'=d',\ \ b'=e',\ \ c'=f'.$$

于是根据本定理第三种情况，球面三角形 $A'B'C'$ 与球面三角形 $D'E'F'$ 全等，故

$$A'=D',\ \ B'=E'\ \ C'=F'.$$

再根据定理Ⅲ

$$A'+a=180°=D'+d,$$
$$B'+b=180°=E'+e,$$
$$C'+c=180°=F'+f.$$

因而 $$a=d,\ \ b=e,\ \ c=f.$$

所以球面三角形 ABC 与球面三角形 DEF 全等，而定理証毕。

显然，由于全等球面三角形可以重合，它們的面积是相等的。

§7. 对称球面三角形

在同球或等球上两球面三角形的对应边和角分别相等，而其排列顺序不相同，则称这两个球面三角形互为对称三角形。

作为对称三角形的例子，我們注意到下面的两个球面三角形（为对称的一个特殊情况）。

从球面三角形 ABC 的頂点作直徑，这些直徑的另一端为 A_0，B_0，C_0。构出球面三角形 $A_0B_0C_0$（图 12）。从这两个球面三角形中容易看出

$$a_0=a, \qquad b_0=b, \qquad c_0=c;$$
$$A_0=A, \qquad B_0=B, \qquad C_0=C,$$

而且順序不相同，故知 $A_0B_0C_0$ 与 ABC 互为对称球面三角形。

定理 V 在同球或等球上，两对称三角形的面积相等。

証 設 ABC，$A_0B_0C_0$ 为两个对称球面三角形，过 ABC 与 $A_0B_0C_0$ 的頂点各作小圓（即通过頂点的平面与球的截口）。由于

$$AC=A_0C_0, \quad AB=A_0B_0, \quad BC=B_0C_0,$$

有：　　弦 AC = 弦 A_0C_0，弦 AB = 弦 A_0B_0，弦 BC = 弦 B_0C_0，

因而　　　　平面 $\triangle ABC \cong$ 平面 $\triangle A_0B_0C_0$，

于是　　　　小圓 ABC = 小圓 $A_0B_0C_0$.

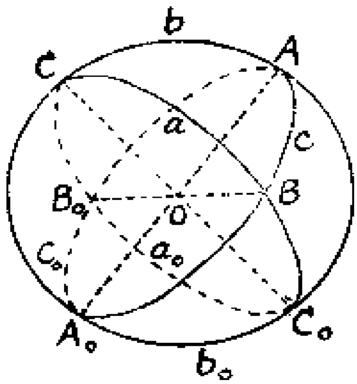


图 12.

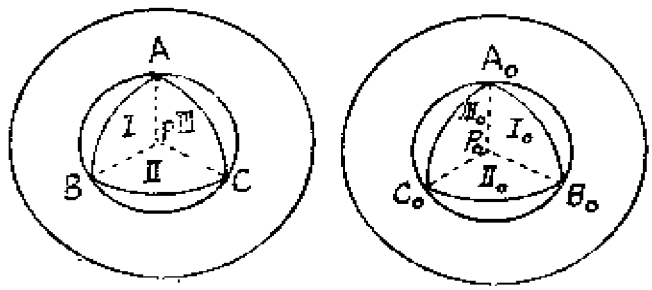


图 13.

現在找出这两个小圓的极 P，P_0（图 13），过 P，P_0 用大圓弧連 AP，BP，CP；A_0P_0，B_0P_0，C_0P_0，則

$$PA=PB=PC=P_0A_0=P_0B_0=P_0C_0.$$

于是根据定理 IV 的第三种情况，球面三角形 APB 与球面三角形 $B_0P_0A_0$ 全等，球面三角形 BPC 与球面三角形 $C_0P_0B_0$ 全等，球面

三角形 CPA 与球面三角形 $A_0P_0C_0$ 全等。

这三对球面三角形旣然是对应全等，它們的面积当然是对应相等的。因而球面三角形 ABC 之面积等于球面三角形 $A_0B_0C_0$ 之面积。而定理得証。

第一章　习題

1. 設在球面上，P_1 为大圓 KK' 的极，P_2 为大圓 Q_1Q_1' 的极，而 KK' 与 Q_1Q_1' 相交于 r_1；当 P_2 移到一个新位置 P_3 时，大圓 Q_1Q_1' 也隨之移到新位置 Q_2Q_2'，且 KK' 与 Q_2Q_2' 相交于 r_2（图 14），求証：

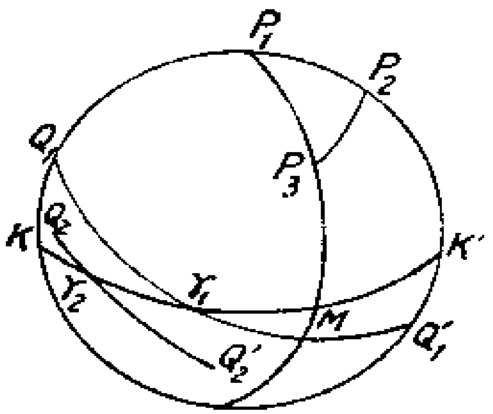


图 14.

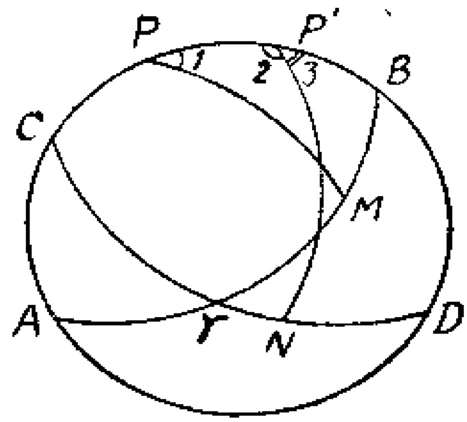


图 15.

(1) r_1 为大圓 P_1P_2K' 之极；

(2) r_2 为大圓 P_1P_3M 之极；

(3) $MK'=r_1r_2$；

(4) $\angle P_3P_1P_2=r_1r_2$.

2. 在球面三角形中，求証：

$$-90^\circ<\frac{1}{2}(A+B-C)<+90^\circ;$$

$$0<\frac{1}{2}(a+b-c)<180^\circ.$$

3. 設两大圓 AB, CD 相交于 r，在 rB, rD 上各取一点 M, N,

使 $rM > rN$；又过 AB 之极 P 作大圓弧 PM，过 CD 之极 P' 作大圓弧 $P'N$（图 15），求証：$\angle 1 < \angle 3 < \angle 2$。

4. 設球面三角形之一边 $c = 90°$，求証：

$$90° < a + b < 270°;$$

$$-90° < a - b < 90°.$$

5. 設球面三角形之一角 $C = 90°$，求証：

$$90° < A + B < 270°;$$

$$-90° < A - B < 90°.$$

6. 設 $P = \frac{1}{2}(A + B + C)$，求証 $\cos(P - B) > 0$；$\cos P < 0$。

7. 設 $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$，求証 $\sin(p - a) > 0$；$\sin p > 0$。

8. 証明 $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)}}$（半角正切公式）不是虛数。

第二章 球面三角形的边和角的函数关系

§1. 边的余弦公式①

以下研究球面三角形的边角关系，我們从边的余弦公式开始。

取球面三角形 ABC，我們假設 $b, c < 90°$。作球心三面角 $O—ABC$（图 16）。自 A 作 b, c 边的切綫分別交 OC, OB 于 M, N；构成两个平面直角三角形 OAM, OAN 与两个平面任意

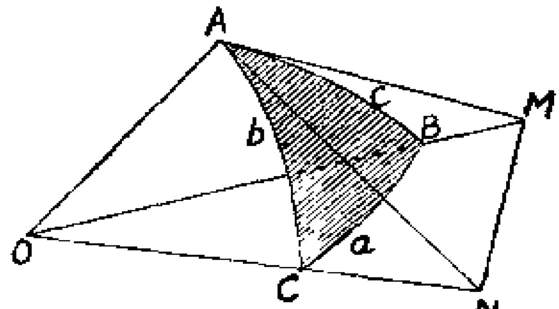


图 16.

①这公式首創于阿拉伯数学家亚尔-巴丹(850—920)。

三角形OMN, AMN。于是按照平面三角的余弦定理，有：

$$\overline{MN}^2=\overline{AM}^2+\overline{AN}^2-2\overline{AM}\cdot\overline{AN}\cos A$$

（对平面 $\triangle AMN$ 来說）.

$$\overline{MN}^2=\overline{OM}^2+\overline{ON}^2-2\overline{OM}\cdot\overline{ON}\cdot\cos a$$

（对平面 $\triangle OMN$ 来說）.

因此，

$$\overline{AM}^2+\overline{AN}^2-2\overline{AM}\cdot\overline{AN}\cos A=\overline{OM}^2+\overline{ON}^2-2\overline{OM}\cdot\overline{ON}\cos a,$$

卽

$$2\overline{OM}\cdot\overline{ON}\cos a=(\overline{ON}^2-\overline{AN}^2)+(\overline{OM}^2-\overline{AM}^2)+2\overline{AM}\cdot\overline{AN}\cos A$$

$$=\overline{OA}^2+\overline{OA}^2+2\overline{AM}\cdot\overline{AN}\cos A,$$

或
$$\cos a=\frac{\overline{OA}}{\overline{ON}}\cdot\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}}+\frac{\overline{AN}}{\overline{ON}}\cdot\frac{\overline{AM}}{\overline{OM}}\cos A;$$

∴
$$\left.\begin{aligned}\cos a&=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.\\ \cos b&=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B.\\ \cos c&=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

同理：（见上式第二、三行）

这就是說，球面三角形每边的余弦等于其他二边余弦的乘积加上这二边正弦及其夹角余弦的乘积。

如果 $b, c\geqslant 90^\circ$，証法与上面的类似，請讀者自己証明。

§2. 角的余弦公式

設球面三角形 ABC 的极三角形为 $A'B'C'$，則按照公式(1)

$$\cos a'=\cos b'\cos c'+\sin b'\sin c'\cos A'.$$

但依第一章 §4 定理 Ⅲ，$a'=180^\circ-A$, $b'=180^\circ-B$, $c'=180^\circ-C$, $A'=180^\circ-a$；以此代入上式，便得

$$-\cos A=\cos B\cos C-\sin B\sin C\cos a,$$

即 $$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a$$
同理: $$\left.\begin{aligned}\cos B&=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b.\\ \cos C&=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c.\end{aligned}\right\}$$

这就是說, 球面三角形角的余弦等于其他两角余弦乘积冠以負号加上这两角正弦及其夹边余弦的乘积。

§3. 正弦公式

設球面三角形 ABC, 作球心三面角 $O-ABC$。过 B 点作平面 OAC 的垂綫交此平面于 D(图 17), 再从 D 向 OA, OC 引垂綫 DE, DF; 連 BE, BF; 于是得四个平面直角三角形 OBE, OBF, BDE, BDF, 而且 $\angle BOC=a$, $\angle AOC=b$, $\angle AOB=c$; $\angle BED=A$, $\angle BFD=C$。因之

$$\frac{\sin c}{\sin C}=\frac{\dfrac{BE}{OB}}{\dfrac{BD}{BF}}=\frac{BE\cdot BF}{OB\cdot BD};$$

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\dfrac{BF}{OB}}{\dfrac{BD}{BE}}=\frac{BE\cdot BF}{OB\cdot BD};$$

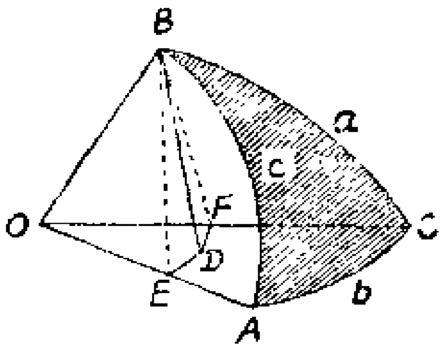


图 17.

故 $$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin c}{\sin C}.$$

同理可証: $$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}.$$

合并起来写, 便得到下列公式(正弦定則):

$$\left.\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}.\right\}\qquad(3)$$

这就是說: 球面三角形各边的正弦与其对角的正弦成比例。

§4. 正余弦公式(五个元素形式)

由边的余弦公式

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,$$

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.$$

将第一式代入第二式并展开:

$$\cos c=(\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A)\cos b+\sin a\sin b\cos C$$

$$=\cos^2 b\cos c+\sin b\cos b\sin c\cos A+\sin a\sin b\cos C,$$

即 $$\cos c(1-\cos^2 b)=\sin b\cos b\sin c\cos A+\sin a\sin b\cos C,$$

或 $$\cos c\sin^2 b=\sin b\cos b\sin c\cos A+\sin a\sin b\cos C.$$

两边同除以 $\sin b$, 并移项, 便得

$$\sin a\cos C=\sin b\cos c-\cos b\sin c\cos A.$$

同样:

$$\left.\begin{aligned}\sin a\cos B&=\sin c\cos b-\cos c\sin b\cos A.\\ \sin b\cos A&=\sin c\cos a-\cos c\sin a\cos B.\\ \sin b\cos C&=\sin a\cos c-\cos a\sin c\cos B.\\ \sin c\cos A&=\sin b\cos a-\cos b\sin a\cos C.\\ \sin c\cos B&=\sin a\cos b-\cos a\sin b\cos C.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

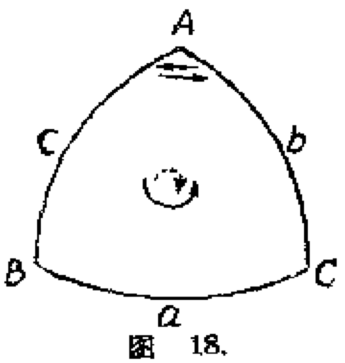


图 18.

这就是第一正余弦公式: 一边的正弦和它邻角的余弦相乘, 等于这邻角另一邻边的正弦和第三边的余弦的乘积减去这另一邻边的余弦、第三边的正弦和它們夹角的余弦的連乘积(图 18)。

至于第二正余弦公式, 它們是:

$$\left.\begin{aligned}\sin A\cos c&=\sin B\cos C+\cos B\sin C\cos a.\\ \sin A\cos b&=\sin C\cos B+\cos C\sin B\cos a.\\ \sin B\cos a&=\sin C\cos A+\cos C\sin A\cos b.\\ \sin B\cos c&=\sin A\cos C+\cos A\sin C\cos b.\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin C\cos a=\sin B\cos A+\cos B\sin A\cos c,\\ \sin C\cos b=\sin A\cos B+\cos A\sin B\cos c.\end{aligned}\right\}$$

即：一角的正弦和它邻边的余弦相乘，等于这邻边另一邻角的正弦和第三角的余弦的乘积加上这另一邻角的余弦、第三角的正弦和它們夹边的余弦的連乘积（图 19）。

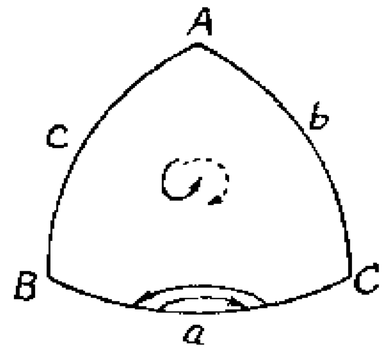


图 19.

如何来証明这第二正余弦公式呢？根据公式(3)

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}=m,$$

或 $\sin a=m\sin A,\quad \sin b=m\sin B,\quad \sin c=m\sin C.$

把这等式代入公式(4)中的任一个中，如第四个，于是

$$m\sin B\cos C=m\sin A\cos c-m\cos a\sin C\cos B,$$

約掉 m，移項，则得公式(5)中的第一个：

$$\sin A\cos c=\sin B\cos C+\cos B\sin C\cos a.$$

同理可証其他。

§5. 余切公式（四个元素形式）

余切公式是球面三角形相邻四个元素的关系式，它們是

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{ctg}A\sin C&=-\cos C\cos b+\sin b\operatorname{ctg}a.\\ \operatorname{ctg}A\sin B&=-\cos B\cos c+\sin c\operatorname{ctg}a.\\ \operatorname{ctg}B\sin A&=-\cos A\cos c+\sin c\operatorname{ctg}b.\\ \operatorname{ctg}B\sin C&=-\cos C\cos a+\sin a\operatorname{ctg}b.\\ \operatorname{ctg}C\sin A&=-\cos A\cos b+\sin b\operatorname{ctg}c.\\ \operatorname{ctg}C\sin B&=-\cos B\cos a+\sin a\operatorname{ctg}c.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

这些公式可以由公式(4)直接推导出来。如由公式(4)中的第

一式:

$$\sin a\cos C=\sin b\cos c-\cos b\sin c\cos A,$$

用 $\sin c$ 除这等式的两边，得

$$\frac{\sin a}{\sin c}\cos C=\sin b\,\mathrm{ctg}\,c-\cos b\cos A,$$

又据正弦定則[公式(3)]，把$\frac{\sin a}{\sin c}$换成$\frac{\sin A}{\sin C}$得:

$$\frac{\sin A}{\sin C}\cos C=\sin b\,\mathrm{ctg}\,c-\cos b\cos A,$$

或
$$\mathrm{ctg}\,C\sin A=-\cos A\cos b+\sin b\,\mathrm{ctg}\,c.$$

这就是公式(6)中的第五式。同理可証其他。

公式(6)还可以写成下列形式:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{ctg}\,a\sin c&=\cos c\cos B+\sin B\,\mathrm{ctg}\,A,\\
\mathrm{ctg}\,a\sin b&=\cos b\cos C+\sin C\,\mathrm{ctg}\,A,\\
\mathrm{ctg}\,b\sin a&=\cos a\cos C+\sin C\,\mathrm{ctg}\,B,\\
\mathrm{ctg}\,b\sin c&=\cos c\cos A+\sin A\,\mathrm{ctg}\,B,\\
\mathrm{ctg}\,c\sin a&=\cos a\cos B+\sin B\,\mathrm{ctg}\,C,\\
\mathrm{ctg}\,c\sin b&=\cos b\cos A+\sin A\,\mathrm{ctg}\,C.
\end{aligned}\right\}\qquad(6)'$$

§6. 把公式改化成为对数形式

以上我們导出了球面三角的六个基本公式[公式(1)—公式(6)]，利用这些公式，可以根据球面三角形的三个已知元素来确定其余三个未知元素，也就是，可以用这些公式来解球面三角形。譬如說，已知球面三角形的两边 b, c 及其夹角 A，可以用公式(1)的第一式而求出第三边 a，可以用公式(6)的第三式和第五式而求出对角 B 和 C。又譬如說，已知两角 A，B 及一对边 a，可用公式(3)来求出另一对边 b，从而在求得对边 b 的基础上，利用公式(4)的第二式或公式(6)的第三式可求出夹边 c。

但是，在实际应用中，用这些公式来解球面三角形是不方便的，因为一般来說它們之中含有加减符号而不便于取对数来計算；也就是說，它們不是取单项式；所以我們应該把这些公式改化成为便于取对数形式。

至于如何改化呢？这应該根据所給条件和要求来灵活进行。这里举出两个例子来作参考。

例 1. 已知 b, c, A, 求 a。

根据已知条件，用公式

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

可以求出 a，但这公式不适宜于对数运算，应該将它改化

$$\cos a=\cos b(\cos c+\operatorname{tg} b\sin c\cos A).$$

令 $$\operatorname{tg} b\cos A=\operatorname{tg} x\cdots\cdots(a)$$

则 $$\cos a=\cos b(\cos c+\sin c\operatorname{tg} x)$$

$$=\frac{\cos b}{\cos x}(\cos c\cos x+\sin c\sin x)$$

$$=\frac{\cos b}{\cos x}\cos(x-c)\quad\cdots\cdots(b)$$

由(a)求出 x 之后代入(b)可求出 a，这两式完全可用对数运算。

例 2. 已知 A, B, a, 求 c。

显然，用公式

$$\operatorname{ctg} a\sin c=\cos c\cos B+\sin B\operatorname{ctg} A.$$

将它改化:

$$\sin B\operatorname{ctg} A=\operatorname{ctg} a\sin c-\cos c\cos B$$

$$=\cos B\left(\frac{\operatorname{ctg} a}{\cos B}\sin c-\cos c\right).$$

令 $$\frac{\operatorname{ctg} a}{\cos B}=\operatorname{ctg} x\cdots\cdots(a)$$

则 $$\sin B\operatorname{ctg} A=\cos B(\operatorname{ctg} x\sin c-\cos c)$$

$$=\frac{\cos B}{\sin x}(\cos x\sin c-\sin x\cos c)$$

$$=\frac{\cos B}{\sin x}\sin(c-x)$$

即
$$\sin(c-x)=\sin x\ \operatorname{ctg}A\operatorname{tg}B\cdots\cdots\cdots(b)$$

由(a)求出x代入(b)可求出c，两式都可以用对数运算。

然而，这样来"改化"公式，一方面在改化时需要花一些力量；另一方面在改化之后应用时还需要作若干次对数和真数的换算，而且有时还需要附加計算。所以还是很麻煩。这就要求我們推导出更簡单更便于取对数形式的公式来，以便能用很短的时間，花少量的計算而解出球面三角形。下面§7—§9就是要推出这样的公式。

§7. 半角公式

为了求出一角和三边的关系，我們取边的余弦公式：

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,$$

或
$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

将这表达式代到平面三角公式$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos A)$中去，便得

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin b\sin c-\cos a+\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}\right]$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c+a)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b\sin c}.$$

令 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则 $\frac{1}{2}(b-c+a)=p-c$，$\frac{1}{2}(a-b+c)=p-b$，$\frac{1}{2}(b+c-a)=p-a$，

故
$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c},$$

或
$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}.\\ \text{同理:}\quad \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin c\sin a}}.\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

公式(7)称为半角正弦公式，由于我們所研究的球面三角形的角都小于 180°（即半角都小于 90°），故根号前应取正号。

又由平面三角公式

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos A).$$

将 $\cos A$ 的表达式(a)代到这里面来，就有

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{A}{2}&=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right]\\ &=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin b\sin c+\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right]\\ &=\frac{1}{2}\,\frac{-\cos(b+c)+\cos a}{\sin b\sin c}\\ &=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\sin c};\end{aligned}$$

即
$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}.\\ \text{同理:}\quad \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin c\sin a}}.\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}.\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

这就是半角余弦公式。和公式（7）的理由一样，根号前也应取正号。

将公式(7)和公式(8)相除，则得半角正切公式：

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}.\\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}}.\\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}.\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

若令$\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}=m$，则公式（9）可写为：

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\frac{m}{\sin(p-a)}.\\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\frac{m}{\sin(p-b)}.\\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\frac{m}{\sin(p-c)}.\end{aligned}\right\}\qquad(9)'$$

显然，当已知球面三角形的三边时，用本节的公式来解球面三角形是比較簡单的。

§ 8. 半边公式

为了表明球面三角形的一边和三角的关系，我們取

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a,$$

或
$$\cos a=\frac{\cos B\cos C+\cos A}{\sin B\sin C}.$$

将这表达式代入平面三角公式$\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos a)$中，有：

$$\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\cos B\cos C+\cos A}{\sin B\sin C}\right]$$

$$=\frac{\sin B\sin C-\cos B\cos C-\cos A}{2\sin B\sin C}$$

$$=\frac{-\cos(B+C)-\cos A}{2\sin B\sin C}$$

$$=\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C}.$$

令 $P=\frac{1}{2}(A+B+C)$，则 $\frac{1}{2}(B+C-A)=P-A$，

$\frac{1}{2}(A-B+C)=P-B$，$\frac{1}{2}(A+B-C)=P-C$.

故 $$\sin^2\frac{a}{2}=\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\sin B\sin C};$$

或 $$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\sin B\sin C}}.$$

同理:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-B)}{\sin A\sin C}}.\\ \sin\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-C)}{\sin A\sin B}}.\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

这就是半边正弦公式。

若取平面三角公式

$$\cos^2\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos a),$$

则仿照上面的方法，可推出半边余弦公式:

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\sin B\sin C}}.\\ \cos\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(P-C)\cos(P-A)}{\sin C\sin A}}.\\ \cos\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-B)}{\sin A\sin B}}.\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

用公式(11)除公式(10)，则得半边正切公式:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)}},\\ \operatorname{tg}\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-B)}{\cos(P-C)\cos(P-A)}},\\ \operatorname{tg}\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-C)}{\cos(P-A)\cos(P-B)}}.\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

或者把它写成:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{a}{2}&=\frac{\cos(P-A)}{M},\\ \operatorname{tg}\frac{b}{2}&=\frac{\cos(P-B)}{M},\\ \operatorname{tg}\frac{c}{2}&=\frac{\cos(P-C)}{M}.\end{aligned}\right\}\tag{12$'$}$$

这里M为:

$$M=\sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-B)\cos(P-C)}{-\cos P}}.$$

因为球面三角形三角之和大于 180° 而小于 540°，所以 $P=\frac{1}{2}(A+B+C)$常大于 90° 而小于 270°，故公式(10)、(11)、(12)中根号内之值永远为正。又因为我們所討論的球面三角形的边小于180°，故公式(10)、(11)、(12)的根号前应取正号。

这一节所讲公式的主要用途在于已知球面三角形的各角时来解算球面三角形的各边。

§9. 半角和、半角差、半边和、半边差的公式

如果已知球面三角形的相邻三元素(两边及夹角或两角及夹边)时，利用本节所讲的公式是比較簡明的。关于半角和、半角差、半边和、半边差的公式有德兰布尔和納白尔两种形式。現在分述如下:

I. 德兰布尔公式

由平面三角公式

$$\sin\frac{1}{2}(A+B)=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

把公式(7)和(8)应用到这公式中来，就有

$$\sin\frac{1}{2}(A+B)=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}}$$

$$+\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin c}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}\left[\frac{\sin(p-b)+\sin(p-a)}{\sin c}\right]$$

$$=\cos\frac{C}{2}\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}(p-b+p-a)\cos\frac{1}{2}(p-b-p+a)}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$=\cos\frac{C}{2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

即

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}. \qquad (13)$$

用类似的作法，可得

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}. \qquad (14)$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}. \qquad (15)$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}. \tag{16}$$

公式(13)、(14)、(15)、(16) 的每一式都代表同类型的三个公式。这些公式很难記忆，下面的記忆方法可能对讀者还有些帮助:

1° 左端分子是角的半和或半差，右端分子是边的半和或半差。

2° 若左端分子是正弦，則右端分子是半差；若左端分子是余弦，則右端分子是半和。

3° 若左端分子是半差，則右端分子是正弦；若左端分子是半和，則右端分子是余弦。

4° 左端的分母是第三半角的且与分子互余的函数；右端分母是第三半边的而与分子同名的函数。

Ⅱ. 納白尔公式

以公式(15)除公式(13)，得

$$\frac{\mathrm{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\mathrm{ctg}\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}. \tag{17}$$

以公式(16)除公式(14)，得

$$\frac{\mathrm{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\mathrm{ctg}\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}. \tag{18}$$

以公式(15)除公式(16)，得

$$\frac{\mathrm{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}. \tag{19}$$

以公式(13)除公式(14)，得

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}. \tag{20}$$

这些就是有名的而在测量学中常用到的納白尔公式，它每一个式子都代表同类型的三个公式。

利用納白尔公式，可得到一个很好記忆的公式:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}, \tag{21}$$

这就是正切定律。

在测量学中，由于所討論的地球大圓弧(球面三角形的边)a, b 远比地球的半徑要小得多，所以在实用中，常常有

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)\doteq\frac{1}{2}(a+b),$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)\doteq\frac{1}{2}(a-b),$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}\doteq\frac{a+b}{a-b}.$$

第二章　习　題

1. 試用极三角形与原三角形的关系，(1) 从第一正余弦公式来証明第二正余弦公式；(2) 从納白尔公式的前二式来証明后二式。

2. 試利用边的余弦公式来証明半角正切公式。

3. 利用角的余弦公式来証明半边正切公式。

4. 将边的余弦公式改化为适合于对数計算的式子，如：(1)已

知 a, c, A, 求 b; (2)已知 a, b, c, 求 A。

5. 将角的余弦公式改化为适合于对数計算的式子，如：(1)已知 B, C, a, 求 A; (2)已知 A, B, C, 求 a,

6. 将余切公式改化为适合于对数計算的式子，如：(1)已知 c, B, A, 求 a; (2)已知 a, c, A, 求 B。

7. 在球面三角形中，設 $A=a$, 求証 B 与 b, C 与 c 相等或互补。

8. 設 D 为球面三角形边 AB 的中点，求証：

$$\cos b+\cos a=2\cos\frac{1}{2}c\cos CD.$$

9. 設 D 为球面三角形边 AB 上的任一点，求証：

$$\cos a\sin AD+\cos b\sin BD=\sin c\cos CD.$$

10. 設两球面三角形 ABC 与 $A'B'C'$ 中，$AB=A'B'$, $AC=A'C'$, 且 $A>A'$, 求証，$a>a'$.

提示：利用余弦公式 $\cos A=\dfrac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$.

11. 利用达兰布尔公式証明：球面三角形任二边之和小于、等于或大于 180°，应視其对角之和小于、等于或大于 180° 而定，反之也成立。

12. 証明：$\dfrac{1}{m}=\operatorname{ctg}\dfrac{1}{2}A\operatorname{ctg}\dfrac{1}{2}B\operatorname{ctg}\dfrac{1}{2}C\csc p.$

此处 $$m=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}.$$

13. 証明：(1) $\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}A\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}B=\dfrac{\sin(p-c)}{\sin p}$;

$$(2)\ \operatorname{ctg}\frac{1}{2}a\operatorname{ctg}\frac{1}{2}b=\frac{\cos(P-C)}{\cos P}.$$

14. 証明在等边球面三角形内：(1) $\sec A=1+\sec a$; (2) $2\cos\dfrac{1}{2}a\sin\dfrac{1}{2}A=1$, (3) $\operatorname{tg}^2\dfrac{1}{2}a=1-2\cos A$.

15. 在球面三角形中，若 $b+c=180°$, 則 $\sin 2B+\sin 2C=0$.

16. 設 θ, φ, ψ 分别为由球面三角形各頂点 A, B, C 至对边所作平分角的大圓弧，求証:

$$\operatorname{ctg}\theta\cos\frac{1}{2}A+\operatorname{ctg}\varphi\cos\frac{1}{2}B+\operatorname{ctg}\psi\cos\frac{1}{2}C=\operatorname{ctg}a+\operatorname{ctg}b+$$
$$+\operatorname{ctg}c.$$

17. 設 D 与 E 为等腰球面三角形的两腰 AB, AC 的中点，求証:

$$\sin\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}a\sec\frac{1}{2}b.$$

第三章　球面三角形的解法

§ 1.　概述

解球面三角形的問題，有以下六种情况:

1°　已知三边，求出三角;

2°　已知三角，求出三边;

3°　已知两边及夹角，求出其他一边及两角;

4°　已知两角及夹边，求出其他一角及两边;

5°　已知两边及一对角，求出其他一边及两角;

6°　已知两角及一对边，求出其他一角及两边。

所有这六个基本問題都能用第二章的公式(1)—(21)来解决。不过，在那些公式中，有的用起来便利些，有的用起来不太便利，所得結果的准确程度也不同。所以在解球面三角形时应根据具体情况，对公式应有适当的选擇。下面两点可作为学者在选擇公式时的参考:

1°　要选擇便于取对数的公式，以便計算；因此最好是用半角公式(第二章 §7)、半边公式 (§ 8)、德兰布尔公式、納白尔公式(§ 9)、正弦定則(§ 3)。

2° 尽量利用未知元素的正切(或余切)来确定这元素，尤其应該尽量避免用正弦；这是因为对于元素的一切值，正切和余切变化快，計算时能給出更滿意的結果；又因为我們所討論的元素是小于180°的，用正弦来确定未知元素时有两个值得出来(大于90°的和小于90°的)，这两个値是否都满足要求呢，这就得增加一些手續来討論它。所以尽量用正切。当然，“尽量避免用正弦”并不等于說“不用正弦”，在必要的时候(如上面所說的第五种情况和第六种情况)，还得用它。

§2. 已知三边解球面三角形

若已知球面三角形的三边 a, b, c；求三角 A, B, C。要解算这类問題，可用边的余弦公式

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A, \tag{1}$$

也可用半角公式

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}, \tag{7}$$

或 $$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}, \tag{8}$$

或 $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}=\frac{m}{\sin(p-a)}. \tag{9}$$

显然，根据上节我們所提供的选擇条件，最好是用公式(9)——半角正切公式。这里，为了計算方便些，可把公式(9)改写成下面的形式：

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{\sin(p-a)}{m}.$$

例 設已知 $a=70°14'20''.5$，$b=49°24'09''.5$，$c=38°46'10''$。試解这球面三角形。

$2p$	158° 24′ 40″	colg m	0.64558
p	79 12 20	lg ctg $\frac{1}{2}A$	9.83831
$p-a$	8 57 59.5	lg ctg $\frac{1}{2}B$	0.34196
$p-b$	29 48 10.5	lg ctg $\frac{1}{2}C$	0.45756
$p-c$	40 26 10	$\frac{1}{2}A$	55° 25′ 38″.6
lg sin$(p-a)$	9.19273	$\frac{1}{2}B$	24° 28′ 01″.7
lg sin$(p-b)$	9.69637	$\frac{1}{2}C$	19° 13′ 23″.2
lg sin$(p-c)$	9.81198	A	110° 51′ 17″.2
colg sin p	0.00775	B	48° 56′ 03″.4
lg m^2	8.70883	C	38° 26′ 46″.4
lg m	9.35442		

所得結果是否正确？这需要檢驗。檢驗的方法当然很多，但根据公式的紧簡和查对数表的方便，以正弦定則

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

作为检驗的工具比較便利。檢驗如下：

lg sin a	9.97364	lg sin b	9.88041	lg sin c	9.79670
lg sin A	9.97057	lg sin B	9.87735	lg sin C	9.79364
	0.00307		0.00306		0.00306

§3. 已知三角解球面三角形

若已知球面三角形的三角A, B, C，求三边 a, b, c。固然，这个問題可用角的余弦公式

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a,$$

或半边正弦公式

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\sin B\sin C}},$$

或半边余弦公式

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\sin B\sin C}}$$

来解决，但是，根据我們在§1中所指出的理由，則应以半边正切公式

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)}}=\frac{\cos(P-A)}{M}$$

为最适宜。

例 已知球面三角形的三个角，$A=129°05'20''.2$；$B=142°12'42''.4$；$C=105°08'10''$，試解这球面三角形。

$2P$	376° 26′ 12″.6	$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}a$	0.39161
P	188 13 06.3	$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}b$	0.52313
$P-A$	59 07 46.1	$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}c$	9.76219
$P-B$	46 00 23.9	$\frac{1}{2}a$	67° 54′ 32″
$P-C$	83 04 56.3	$\frac{1}{2}b$	73 18 35
$\lg\cos(P-A)$	9.71020	$\frac{1}{2}c$	30 02 34
$\lg\cos(P-B)$	9.84172	a	135° 49′ 05″
$\lg\cos(P-C)$	9.08078	b	146 37 10
$\operatorname{colg}(-\cos P)$	0.00448	c	60 05 09
$\lg M^2$	8.63718		
$\lg M$	9.31859		
$\operatorname{colg}M$	0.68141		

驗算：

$\lg\sin a$	9.84320	$\lg\sin b$	9.74052	$\lg\sin c$	9.93791
$\lg\sin A$	9.88996	$\lg\sin B$	9.78728	$\lg\sin C$	9.98467
	9.95324		9.95324		9.95324

§4. 已知两边及夹角解球面三角形

当已知球面三角的两边 a, b 及其夹角 C 时，求这球面三角形的其他元素 A, B 和 c，仔細来考查第二章的公式，我們会发現采用下列公式和步驟是比較簡便的：先用納白尔公式的第一、二式

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C,$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C$$

来解算 A, B;然后用所得的 A, B 值采用納白尔公式的第三式

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)$$

来解算 c。

例 已知 $a=104°23'15''$; $b=67°04'28''$; $C=36°17'49''$, 求 A, B 及 c。

$a-b$	37° 18′ 45″	$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)$	1.58916
$\frac{1}{2}(a-b)$	18 39 22.5	$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)$	9.99062
$a+b$	171 27 43	$\frac{1}{2}(A+B)$	88° 31′ 29″
$\frac{1}{2}(a+b)$	85 43 51.5	$\frac{1}{2}(A-B)$	44 22 53
$\frac{1}{2}C$	18° 08′ 54″.5	A	132° 54′ 22″
$\lg\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C$	0.48441	B	44 08′ 36″
$\lg\cos\frac{1}{2}(a-b)$	9.97655	$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)$	1.12699
$\operatorname{colg}\cos\frac{1}{2}(a+b)$	1.12820	$\lg\cos\frac{1}{2}(A+B)$	8.41070
$\lg\sin\frac{1}{2}(a-b)$	9.50500	$\operatorname{colg}\cos\frac{1}{2}(A-B)$	0.14588
$\operatorname{colg}\sin\frac{1}{2}(a+b)$	0.00121	$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}c$	9.68357
$\lg\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C$	0.48441	$\frac{c}{2}$	25° 45′ 40″
		c	51° 31′ 20″

学者自行驗算。

§5. 已知两角及夹边解球面三角形

若已知两角 A, B 及其夹边 c，求其他元素 a, b 和 C。要解决这个問題，最好是先用納白尔公式的第三、四式

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}c,$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}c$$

求出 a 和 b，然后根据所求得的 a, b 值，利用納白尔公式的第一式

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)$$

来求出 C。

例 已知 $A=126°18'04''$; $B=63°42'14''$; $c=106°43'37''$，求 a, b, C。

$A-B$	62° 35′ 50″	$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)$	1.11981(n) ①
$\frac{A-B}{2}$	31 17 55		
$A+B$	190 00 18	$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)$	9.84587
$\frac{A+B}{2}$	95 00 09	$\frac{1}{2}(a+b)$	94° 20′ 24″
$\frac{c}{2}$	53 21 48.5	$\frac{1}{2}(a-b)$	35 02 24

①表中符号(n)的說明：球面三角形的边或角大于90°时，其余弦、正切、余切皆为负数，凡负数的对数，就在它后面附上一个(n)以区别于正数的对数。同时由于偶数个负数相乘为正，奇数个负数相乘为负，故列表計算时遇有偶数个符号(n)时，相加結果就不要再附(n)了；遇有奇数个(n)时，相加結果还要附一个(n)。

$\lg \operatorname{tg} \frac{c}{2}$	0.12863	a	129° 22′ 48″
		b	59 18 00
$\lg \cos \frac{A-B}{2}$	9.93170	$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)$	1.05783 (n)
$\operatorname{colg} \cos \frac{A+B}{2}$	1.05948 (n)	$\lg \cos \frac{1}{2}(a+b)$	8.87895 (n)
$\lg \sin \frac{A-B}{2}$	9.71558	$\operatorname{colg} \cos \frac{1}{2}(a-b)$	0.08685
$\operatorname{colg} \sin \frac{A+B}{2}$	0.00166	$\lg \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$	0.02363
$\lg \operatorname{tg} \frac{c}{2}$	0.12863	$\frac{C}{2}$	43° 26′ 30″
		C	86° 53′ 00″

驗算

$\lg \sin a$	9.88815	$\lg \sin b$	9.93443	$\lg \sin c$	9.98122
$\lg \sin A$	9.90629	$\lg \sin B$	9.95256	$\lg \sin C$	9.99936
	9.98186		9.98187		9.98186

§ 6. 已知两边及一对角解球面三角形

若已知球面三角形的两边 a, b 及一对角 A，求这球面三角形的其他元素 B, C, c。对于这个問題，通常有两个解，也就是說通常有两个球面三角形适合所給条件。如图 20，設 AB_1C 为适合已知条件 a, b, A 的球面三角形，現在作一个以 C 为极、以 a 为极距离的小圓交大圓 AB_1 于 B_2，显然，球面三角形 AB_2C 也适合已知条件 a, b, A。且由第一章 § 5 性質 V 知，$B_2 = 180° - B_1$。

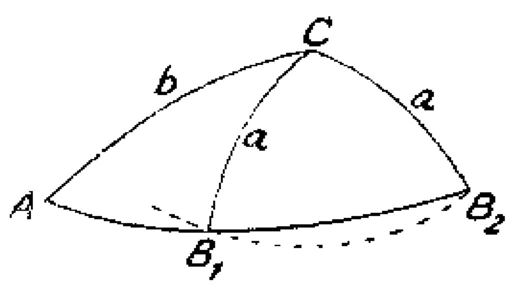


图 20.

这只是就“一般情况”而說的，但在特殊情况，这个問題可能仅有一个解甚或沒有解（即以 C 为极、以 a 为极距离的小

圓和大圓AB_1的交点可能只有一点是合理的，可能沒有合理的点，也有可能只交于一点或根本不相交——这是因为我們所討論的元素是小于 180° 的)。

至于这个問題的具体解法，可先用正弦定則

$$\sin B=\frac{\sin b}{\sin a}\sin A$$

来确定 B，在本章 §1中已經說过，在通常情况下有两个解(即大于90°的 B 与小于 90° 的 B)．令这两个解为 B_1 及 B_2，B_1 和 B_2 之間的关系应該是

$$B_1+B_2=180° \text{ 或 } B_2=180°-B_1.$$

当然在特殊情况下，也可能只有一个解是合理的。特別，当$\sin B>1$时，即当 $\sin a<\sin b\sin A$ 时，根本就沒有解($\because \sin B>1$ 不合理)。

然而在什么情况下有两个解、在什么情况下有一个解、在什么情况下沒有解呢？这可依据下表事先檢定。

$A<90°$	$b<90°$	$a<b$	有二解
		$a=b$	有一解($B=A$)
		$a>b$ 且 $a+b<180°$	有一解($B<90°$)
		$a>b$ 且 $a+b\geqslant 180°$	沒有解
	$b=90°$	$a<b$ 且 $a<A$	沒有解
		$a<b$ 且 $a>A$	有二解
		$a<b$ 且 $a=A$	有一解
		$a\geqslant b$	沒有解
	$b>90°$	$a<b$ 且 $a+b<180°$	有二解
		$a<b$ 且 $a+b\geqslant 180°$	有一解($B>90°$)
		$a\geqslant b$	沒有解
$A=90°$	$b<90°$	$a\leqslant b$	沒有解
		$a>b$ 且 $a+b<180°$	有一解($B<90°$)
		$a>b$ 且 $a+b\geqslant 180°$	沒有解
	$b=90°$	$a<b$ 或 $a>b$	沒有解
		$a=b$	无确定解

A	b	a	解
	$b>90^\circ$	$a<b$ 且 $a+b>180^\circ$	有一解（$B>90^\circ$）
		$a<b$ 且 $a+b\leqslant 180^\circ$	沒有解
		$a\geqslant b$	沒有解
$A>90^\circ$	$b<90^\circ$	$a\leqslant b$	沒有解
		$a>b$ 且 $a+b\leqslant 180$	有一解（$B<90^\circ$）
		$a>b$ 且 $a+b>180^\circ$	有二解
	$b=90$	$a\leqslant b$	沒有解
		$a>b$ 且 $a=A$	有一解
		$a>b$ 且 $a<A$	有二解
		$a>b$ 且 $a>A$	沒有解
	$b>90^\circ$	$a<b$ 且 $a+b>180^\circ$	有一解（$B>90^\circ$）
		$a<b$ 且 $a+b\leqslant 180^\circ$	沒有解
		$a=b$	有一解（$B=A$）
		$a>b$	有二解

注意：上表中凡有二解的，若 $\lg\sin B$ 为正（郎 $\sin B>1$）时則沒有解。

关于这个表的証明，附在本章最后一节（§ 8），讀者可在課余时間看一看。

根据正弦定則和上表确定 B 之后，再用納白尔公式的第一和第三式（或第四式）来求出 C 和 c：

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(A+B),$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b).$$

最后，为了檢驗所得的答案是否正确，还应該也必須用正弦定則来驗算一下。

例 1. 設 $a=50^\circ45'20''$；$b=69^\circ12'40''$；$A=44^\circ22'10''$，試解这球面三角形。

依据上面的表，$A<90°$， $b<90°$， $a<b$ 且 $\lg\sin B$ 为负，故根据表中第一行，有二解。

$\lg\sin b$	9.97076	$\lg\sin B$	9.92641
$\lg\sin A$	9.84465	B_1	57° 34′ 51″.4
$\operatorname{colg}\sin a$	0.11100	B_2	122° 25′ 03″.6

$$\frac{1}{2}(a-b)=-9°13'40'', \qquad \frac{1}{2}(a+b)=59°59'00''.$$

B	$B_1=57°\ 34'\ 54''.4$	$B_2=122°\ 25'\ 08''.6$
$\frac{1}{2}(A+B)$	50 58 30.7	83 23 39 .3
$\frac{1}{2}(A-B)$	−6 36 20.7	78 02 56 .6
$\lg\cos\frac{1}{2}(a-b)$	9.99434	9.99434
$\operatorname{colg}\cos\frac{1}{2}(a+b)$	0.30081	0.30081
$\lg\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(A+B)$	9.90875	9.06373
$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$	0.20390	9.35888
$\frac{1}{2}C$	57° 58′ 55″.3	12° 52′ 15″.8
C	$C_1=115°\ 57'\ 50''.6$	$C_2=25°\ 44'\ 31''.6$
$\lg\cos\frac{1}{2}(A+B)$	9.79910	9.06084
$\operatorname{colg}\cos\frac{1}{2}(A-B)$	0.00289	0.10965
$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)$	0.23827	0.23827
$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}c$	0.04026	9.40876
$\frac{1}{2}c$	47° 39′ 08″.2	14° 22′ 32″.6
c	$c_1=95°\ 18'\ 16''.4$	$c_2=28°\ 45'\ 05''.2$

驗算：

lg sin a lg sin A	9.88900 9.84465 0.04435	lg sin b lg sin B	9.97076 9.92641 0.04435

lg sin c_1 lg sin C_1	9.99814 9.95379 0.04435	lg sin c_2 lg sin C_2	9.68215 9.63781 0.04434

例 2. 已知 $c=50°45'20''$; $b=69°12'40''$; $C=144°22'10''$, 求 A, a, B。

据表上倒数第 11 行，这題沒有解。

§ 7. 已知两角及一对边解球面三角形

当已知两角 A, B 及一对边 a 解这球面三角形时，通常也有两个解。如图 21，設 A_1B_1C 为适合已知条件 A, B, a 的球面三角形，延長大圓弧 A_1B_1, A_1C 使之交于 A_2，則 $A_2=A_1=A$；又以 C 为极、以 a 为极距離的小圓交大圓 A_1B_1 于 B_2，則由第一章 §5 性質 V，图中的 $B_2=B_1=B$，这就是說，球面三角形 A_2B_2C 也适合已知条件，且 $b_1+b_2=180°$。因之，这个問題通常（只是"通常"）有两个解。当然，也有一个解或沒有解的情况。

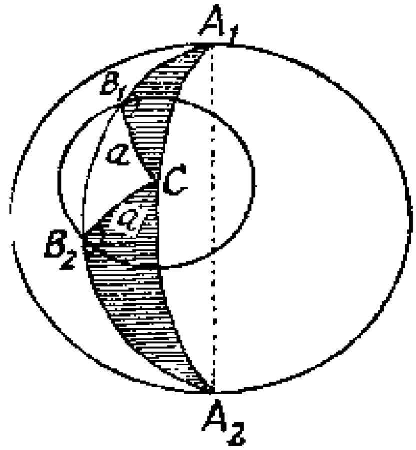


图 21.

关于这个問題的具体解法是：先利用正弦定則

$$\sin b=\frac{\sin B}{\sin A}\cdot \sin a$$

求出未知元素 b，由于所要求的元素 b 只是小于 $180°$，故在通常情况下，有两个解 b_1 和 b_2，且 $b_1+b_2=180°$。当然，也有可能只有一个解。并且在 $\sin b>1$，卽 $\sin A<\sin a\sin B$ 的情况下，根本就沒

$a<90°$	$B<90°$	$A<B$	有二解
		$A=B$	有一解 $(b=a)$
		$A>B$ 且 $A+B<180°$	有一解 $(b<90°)$
		$A>B$ 且 $A+B\geqslant180°$	沒有解
	$B=90°$	$A<B$ 且 $A<a$	沒有解
		$A<B$ 且 $A>a$	有二解
		$A<B$ 且 $A=a$	有一解
		$A\geqslant B$	沒有解
	$B>90°$	$A<B$ 且 $A+B<180°$	有二解
		$A<B$ 且 $A+B\geqslant180°$	有一解 $(b>90°)$
		$A\geqslant B$	沒有解
$a=90°$	$B<90°$	$A\leqslant B$	沒有解
		$A>B$ 且 $A+B<180°$	有一解 $(b<90°)$
		$A>B$ 且 $A+B\geqslant180°$	沒有解
	$B=90°$	$A<B$ 或 $A>B$	沒有解
		$A=B$	无确定解
	$B>90°$	$A<B$ 且 $A+B>180°$	有一解 $(b>90°)$
		$A<B$ 且 $A+B\leqslant180°$	沒有解
		$A\geqslant B$	沒有解
$a>90°$	$B<90°$	$A\leqslant B$	沒有解
		$A>B$ 且 $A+B\leqslant180°$	有一解 $(b<90°)$
		$A>B$ 且 $A+B>180°$	有二解
	$B=90°$	$A\leqslant B$	沒有解
		$A>B$ 且 $A=a$	有一解
		$A>B$ 且 $A<a$	有两解
		$A>B$ 且 $A>a$	沒有解
	$B>90°$	$A<B$ 且 $A+B>180°$	有一解 $(b>90°)$
		$A<B$ 且 $A+B\leqslant180°$	沒有解
		$A=B$	有一解 $(b=a)$
		$A>B$	有二解

有解。

至于在什么情况下有两个解、一个解或沒有解呢？这可依据上表（40 頁上）来检定。

注意：上表中凡有二解的，若 $\lg\sin b$ 为正（卽 $\sin b>1$）时，則沒有解。

这个表的証明，可把已知球面三角形的极三角形 $A_1B_1C_1$ 应用到上节的表中，由于 $a_1=180°-A$，$b_1=180°-B$、$A_1=180°-a$ 等关系，則馬上就得到这个表的結果。

根据正弦定則和这个表确定 b 之后，再用納白尔公式的第一式与第三式（或第四式）来求 c 和 C：

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(A+B),$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b).$$

例 1. 已知 $B=70°$；$C=81°20'$；$b=122°40'$，試解这球面三角形。

由于 $b>90°, C<90°, B<C$，由表第 20 行知道这題沒有解。

例 2. 已知 $A=89°45'$；$B=100°15'$；$a=125°30'$，求 b, c 和 C。

因为 $a>90°, B>90°, A<B$ 且 $A+B>180°$，故由表倒数第四行，这題只有一个解，且应取边 b 大于 $90°$。

lg sin B	9.99301	lg tg $\frac{1}{2}(a+b)$	0.13662(n)
colg sin A	0.00000	lg cos $\frac{1}{2}(A+B)$	8.94030(n)
lg sin a	9.91069	colg cos $\frac{1}{2}(A-B)$	0.00183
lg sin b	9.90370	lg tg $\frac{1}{2}c$	9.07875
b	126° 46′	$\frac{1}{2}c$	6° 50′
$\frac{1}{2}(A+B)$	95° 00′	c	13° 40′
$\frac{1}{2}(A-B)$	−5° 15′	lg ctg $\frac{1}{2}(A+B)$	8.94195(n)
$\frac{1}{2}(a+b)$	126° 08′	lg cos $\frac{1}{2}(a-b)$	9.99997
$\frac{1}{2}(a-b)$	−0° 38′	colg cos $\frac{1}{2}(a+b)$	0.22939(n)
		lg tg $\frac{1}{2}C$	9.17131
		$\frac{1}{2}C$	8° 26′
		C	16° 52′

驗算:

lg sin a	9.91069	lg sin b	9.90370	lg sin c	9.37341
lg sin A	0.00000	lg sin B	9.99301	lg sin C	9.46262
	9.91069		9.91069		9.91079

§ 8. 判别有解或沒有解的理由

在已知球面三角形的两边 a, b 及一对角 A 来求解时(§ 6)，我們列出了一个表來判别这样的解有一个、有二个、或者根本沒有。判别它的理由是什么呢？下面簡单說明一下。

首先，我們討論 $a=b$ 的情形。因为 $a=b$，則 $A=B$，于是納白尔公式第一式和第三式变为

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C=\operatorname{tg}A\cos a,\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}c=\operatorname{tg}a\cos A.$$

由于$\frac{1}{2}C$，$\frac{1}{2}c$小于90°，则$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C$，$\operatorname{tg}\frac{1}{2}c$永远为正，所以$A$与$a$必須同时大于90°或同时小于90°。因此，在这种情况下，若A与a不同时大于90°或不同时小于90°，則沒有解；若A与a同时大于90°或同时小于90°，則有解而且只有一个解$(B=A)$；若A与a都是90°，則$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C$与$\operatorname{tg}\frac{1}{2}c$为不定，于是无确定的解。这就証明了表中$a=b$的各种情形。

再、我們来討論其他情况。由公式

$$\sin B=\frac{\sin b}{\sin a}\sin A, \tag{3}$$

只要$\sin b\sin A>\sin a$，就沒有解；而当$\sin b\sin A\not>\sin a$时，B就可能有两个解；令这两个解为B_1和B_2，显然，$B_1+B_2=180°$。为方便計，不妨假定$B_1<B_2$。

由第一章§5性质Ⅴ及性质Ⅵ $A-B$与$a-b$应有相同的符号或同时等于0。現在就用$A-B_1$，$A-B_2$的符号和$a-b$的符号相比較的方法来証明表中各行結論的正确性。当然，为了避免文字的累贅，我們只要証明几行就行了，其余的可照类推。

設$A<90°$，$b<90°$，$a<b$，在这种情况下，公式(3)中的$\sin A$，$\sin b$，$\sin a$都为正，而$\frac{\sin b}{\sin a}>1$，于是$\sin A<\sin B$。因此$A<B_1$，$A<B_2$，而滿足于这两个不等式的B_1和B_2都是合理的，这就是說，問題有两个解，而表中第一行的結果得証。

表中第二行在上面已經說过了。

現在来証明表中第三行、第四行。这时$A<90°$，$b<90°$，$a>b$；而$a+b$有小于180°、等于180°或大于180°之分。若$a+b<180°$，在公式(3)中，由于$\frac{\sin b}{\sin a}<1$（$\because a>b$，且$a+b<180°$），則$\sin B<\sin A$。因此，小于A的B_1为合理的解，而B_2（当$B_1<A<90°$时，B_2必須大于$90°>A$）为不合理。故在这情况下只有一个解$(B<90°)$。这就証明了表中第三行的結論。若$a+b=180°$，則$\sin a=\sin b$，由公式(3)得$B_1=A$，因而$B_2>A$，由第一章§5

性質 V 和性質 VI, 則必 $a=b$ 和 $b>a$, 这显然与假設条件 $a>b$ 相矛盾, 因此这样的 B_1 与 B_2 都不合理, 而問題沒有解。若 $a+b>180°$, 在公式(3)中, 由于 $\sin a<\sin b$ ($\because a+b>180°$, 而 $a>b$), 則 $\sin A<\sin B$, 于是 $B_1>A$, $B_2>A$, 这二者都不合理, 因而問題沒有解。这就証明了表中第四行的結論。

用同样的理由和方法, 可以証明表中其他各行的結論。

第三章 习題

1. 已知三边解球面三角形:

(1) $a=82°11'17''$, $b=64°19'21''$, $c=31°31'30''$.

答: $A=119°41'40''$, $B=52°12'30''$, $C=27°00'16''$.

(2) $a=171°18'12''$, $b=54°07'16''$, $c=133°09'24''$.

答: $A=173°48'52''$, $B=144°44'00''$, $C=148°40'48''$.

2. 已知三角解球面三角形:

(1) $A=62°05'40''$, $B=54°36'10''$, $C=70°14'30''$.

答: $a=30°04'56''$, $b=27°32'22''$, $c=32°15'48''$.

(2) $A=47°59'12''$, $B=130°46'58''$, $C=56°48'52''$.

答: $a=60°31'41''$, $b=117°28'18''$, $c=78°42'26''$.

3. 已知两边及其夾角解球面三角形:

(1) $a=104°23'15''$, $b=67°04'28''$, $C=36°17'49''$.

答: $c=51°31'20''$, $A=132°54'22''$, $B=44°08'36''$.

(2) $a=105°40'00''$, $c=62°21'14''$, $B=70°56'10''$.

答: $b=81°10'58''$, $A=112°56'18''$, $C=57°54'54''$.

4. 已知两角及其夾边, 解球面三角形:

(1) $c=34°29'34''$, $A=59°32'16''$, $B=77°18'20''$.

答: $a=36°52'33''$, $b=42°46'41''$, $C=54°26'00''$.

(2) $a=66°32'$, $B=111°32'$, $C=75°51'$.

答: $b=107°16'$, $c=84°30'$, $A=63°19'$.

5. 已知两边及一对角, 解球面三角形:

(1) $a=112°40'26''$, $b=58°27'42''$, $A=98°22'40''$.

答: $c=122°27'20''$, $B=66°02'20''$, $C=115°12'52''$.

(2) $a=54°18'16''$, $c=97°12'25''$, $A=51°18'13''$.

答: 有二解, $b_1=124°12'28''$, $B_1=127°22'00''$, $C_1=72°26'45''$.

$b_2=78°39'46''$, $B_2=70°26'18''$, $C_2=107°33'15''$.

(3) $a=132°40'21''$, $b=120°53'35''$, $A=88°52'42''$.

答: 沒有解.

6. 已知两角及一对边解球面三角形:

(1) $a=54°12'28''$, $A=66°10'42''$, $B=41°00'24''$.

答: 有一解, $b=75°34'37''$, $c=62°25'10''$, $C=91°32'24''$.

(2) $a=61°05'12''$, $A=59°30'40''$, $B=73°13'22''$

答: 有二解, $b_1=76°33'00''$, $c_1=92°55'30''$, $C_1=100°23'23''$.

$b_2=103°27'00''$, $c_2=142°49'48''$, $C_2=143°30'11''$.

(3) $a=72°13'14''$, $A=112°12'48''$, $B=82°50'12''$.

答: 沒有解.

第四章 直角球面三角形

§1. 直角球面三角形的边角关系

直角球面三角形可以有一个、两个或三个直角。含有三直角的球面三角形,它的各边皆为一象限(图22)。含有两个直角的球面三角形,其对直角的两边皆为一象限,而第三边与第三角同度(为什么?),所以含有三个或两个直角的球面三角形,其边角关系都是确定的,就不必再去研究。本章所研究的对象为含有一个直角的球面三角

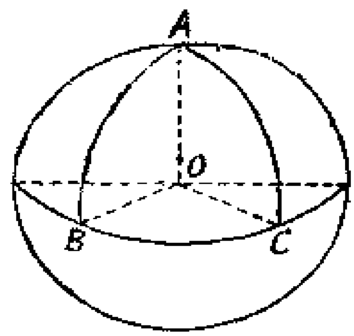


图 22.

形。

設球面三角形 ABC 中，$C=90°$。于是 $\cos C=0$, $\sin C=1$。依照第二章§1—§5所講的公式，我們有：

原公式編号	任意球面三角形	直角($C=90°$)球面三角形	新公式編号
1	$\cos c=\cos b\cos a+\sin a\sin b\cos C$	$\cos c=\cos a\cos b$	1
2	$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a$	$\cos A=\sin B\cos a$	2
2	$\cos B=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b$	$\cos B=\sin A\cos b$	3
2	$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c$	$\cos c=\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B$	4
3	$\dfrac{\sin a}{\sin A}=\dfrac{\sin c}{\sin C}$	$\sin a=\sin A\sin c$	5
3	$\dfrac{\sin b}{\sin B}=\dfrac{\sin c}{\sin C}$	$\sin b=\sin B\sin c$	6
6′	$\operatorname{ctg}a\sin b=\cos b\cos C+\sin C\operatorname{ctg}A$	$\sin b=\operatorname{tg}a\operatorname{ctg}A$	7
6′	$\operatorname{ctg}b\sin a=\cos a\cos C+\sin C\operatorname{ctg}B$	$\sin a=\operatorname{tg}b\operatorname{ctg}B$	8
6′	$\operatorname{ctg}c\sin a=\cos a\cos B+\sin B\operatorname{ctg}C$	$\cos B=\operatorname{tg}a\operatorname{ctg}c$	9
6′	$\operatorname{ctg}c\sin b=\cos b\cos A+\sin A\operatorname{ctg}C$	$\cos A=\operatorname{tg}b\operatorname{ctg}c$	10

这十个公式完全沟通了直角球面三角形的边角关系。根据它們，可以解算直角球面三角形。

当然，这十个公式也可以不借重于第二章的公式而直接推出(本节从略)。

上面所說的是假定 $C=90°$。若 $A=90°$ 或 $B=90°$，只要把公式的字母改換一下就行了。

§2. 納白尔規則

为了便于对上节十个公式的記忆，納白尔曾用下面的規則(記忆方法)：

假想一个球面三角形，它的三边为 $a, b, 90°-c$；a, b 的对角为

$90°-A$ 和 $90°-B$；另一角为直角 C 而不标出其符号(图 23)。于是就构成了輪环的五个元素：$a, 90°-B, 90°-c, 90°-A, b$。納白尔的規則是：对于任一元素的正弦等于

(1) 两相邻元素的正切之积；

(2) 两相对元素的余弦之积。

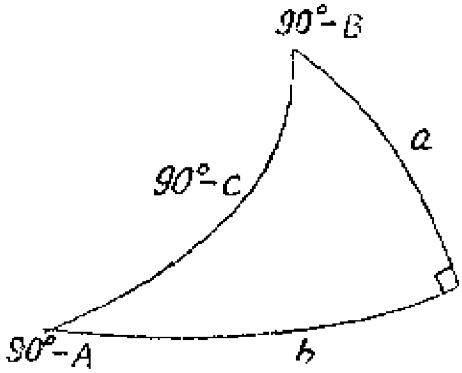


图 23.

例如，取元素 $90°-c$，它的两个相邻元素为 $90°-A$ 和 $90°-B$，它的两个相对元素为 a 和 b，于是

$$\sin(90°-c)=\operatorname{tg}(90°-A)\operatorname{tg}(90°-B), \text{ 即 } \cos c=\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{ctg}B,$$

$$\sin(90°-c)=\cos a\cos b, \qquad \text{即 } \cos c=\cos a\cos b.$$

这就是上节的公式(4)和公式(1)。

§ 3. 直角球面三角形的解法

由 § 1 中直角球面三角形的基本公式可以看出，每个公式只含有三个元素，因此，只要知道三元素中的两个元素，就可以解出这球面三角形。而且这些公式都是可以直接取对数的。虽然，第二章 § 7—§ 9 的那些可取对数的公式，也可用来解直角球面三角形，正如第三章中所作的那样；但是，利用本章 § 1 的基本公式显然要簡便得多。

在实际应用时，还得要注意下列事项：

(1) 尽可能地避免用未知元素的正弦来求这未知元素，最好是用正切或余切来求。这理由与第三章 § 1 中所說的理由是一样的。

(2)按照公式(1)

$$\cos c=\cos a\cos b,$$

若直角边 a, b 同时大于 $90°$ 或同时小于 $90°$，则 $\cos c$ 均为正，因之

斜边 c 应小于 $90°$。若直角边 a, b 有一个大于 $90°$，另一个小于 $90°$，则 $\cos c$ 为負，而斜边 c 应大于 $90°$，所以：

在直角球面三角形中，若两直角边同时大于 $90°$ 或同时小于 $90°$，則第三边小于 $90°$；若一个直角边大于 $90°$，另一个直角边小于 $90°$，則斜边必大于 $90°$。

(3)按照公式(4)

$$\cos c = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B,$$

若斜边的邻角 A, B 同时大于 $90°$ 或同时小于 $90°$，則斜边 c 必小于 $90°$。若 A, B 中有一个大于 $90°$，而另一个小于 $90°$，則斜边 c 必大于 $90°$。这就是說：

在直角球面三角形中，若斜边的两邻角同时大于或同时小于 $90°$，則斜边必小于 $90°$；若这两个邻角中有一个大于 $90°$，一个小于 $90°$，則斜边必大于 $90°$。

(4)按照公式(2)和(7)

$$\cos A = \sin B \cos a, \quad \operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg} A,$$

由于 $\sin B$, $\sin b$ 永远为正，則 $\cos A$ 与 $\cos a$ 的符号相同，$\operatorname{tg} a$ 与 $\operatorname{tg} A$ 的符号相同，因之，A 与 a 必同时大于 $90°$ 或同时小于 $90°$，这就是說：

直角球面三角形的直角边与它的对角同时大于 $90°$ 或同时小于 $90°$。

解直角球面三角形，也有六种情况，即：(1)已知两直角边；(2)已知两角；(3)已知斜边及一直角边；(4)已知斜边及一角；(5)已知一直角边及其邻角；(6)已知一直角边及其对角。

这里，我們不必对每种情况一一举例或加以說明，而只举出下面两个例子。

例 1. 已知直角球面三角形的两个直角边 $a=152°31'24''$，$b=51°12'08''$，解这球面三角形。

对本題有用的公式有：

$$\cos c = \cos a \cos b, \quad \mathrm{tg} A = \frac{\mathrm{tg}\, a}{\sin b}, \quad \mathrm{tg} B = \frac{\mathrm{tg}\, b}{\sin a}.$$

同时根据本节所提示的注意事项(2)，c 必大于 90°；根据注意事项(4)，A 必大于 90°，B 必小于 90°。

lg cos a	9.94802 (n)	lg tg a	9.71604 (n)	lg tg b	0.09477
lg cos b	9.79697	colg sin b	0.10826	colg sin a	0.33593
lg cos c	9.74499 (n)	lg tg A	9.82430 (n)	lg tg B	0.43070
c	123° 46′ 20″	A	146° 17′09″	B	69° 38′ 54″

如果要檢驗所得結果是否正确，可用本章 §1 的其他基本公式之一来檢驗，如用公式(4)

lg ctg A	0.17569 (n)
lg ctg B	9.56930
lg cos c	9.74499 (n)

可見計算沒有錯。

例 2. 已知直角球面三角形的一直角边 $a = 122°30'00''$ 及其对角 $A = 120°20'20''$。求这球面三角形的其他元素 c, b, B。

应用公式

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}, \quad \sin b = \mathrm{tg}\, a\, \mathrm{ctg} A, \quad \sin B = \frac{\cos A}{\cos a};$$

又根据本节注意事项(2)，或者根据第三章 §7 表中第 25 行，本題有两个解。

lg sin a	9.92603	lg tg a	9.19581	lg cos A	9.70339
colg sin A	0.06396	lg ctg A	9.76735	colg cos a	0.26978
lg sin c	9.98999	lg sin b	9.96316	lg sin B	9.97317
c	77° 44′ 46″	b	66° 43′ 39″	B	70° 04′ 02″
或	102° 15′ 14″	或	113° 16′ 21″	或	109° 55′ 58″

显然，根据本节注意事項(2)和(4)，上表中两組答案的配合

应該是这样的:

$$\begin{cases} c=112°15'\ 14'' \\ b=66°43'\ 39'' \\ B=70°04'\ 02'' \end{cases} \qquad \begin{cases} c=77°44'\ 46'' \\ b=113°16'\ 21'' \\ B=109°55'\ 58'' \end{cases}$$

第四章　习题

1. 在球面三角形 ABC 中，若 $C=90°$，则 $\frac{\sin(B-b)}{\sin(B+b)}\geqslant 0$.

2. 在球面三角形 ABC 中，設 C 为直角，求証:

(1) $\mathrm{tg}a\cos c=\sin b\,\mathrm{ctg}B$.

(2) $\sin(a-b)=\sin a\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}A-\sin b\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}B$.

(3) $\sin(b+c)=2\cos^2\frac{1}{2}A\cos b\sin c$.

(4) $\sin(c-a)=\sin b\cos a\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}B$.

(5) $\sin(c-b)=2\sin^2\frac{1}{2}A\cos b\sin c$.

(6) $\sin^2\frac{1}{2}c=\sin^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b$.

(7) $\sin^2A=\cos^2B+\sin^2a\sin^2B$.

(8) $\sin^2A\cos^2c=\sin(A+a)\sin(A-a)$.

(9) $\cos^2A\sin^2c=\sin(c+a)\sin(c-a)$.

3. 設自直角球面三角形的直角頂 C 作大圓弧垂直于斜边 AB 而与 AB 相交于 D，求証:

(1) $\mathrm{ctg}^2CD=\mathrm{ctg}^2a+\mathrm{ctg}^2b$. (2) $\mathrm{tg}^2a=\mathrm{tg}c\,\mathrm{tg}BD$.

(3) $\mathrm{tg}^2CD=\mathrm{tg}AD\,\mathrm{tg}AD$.

4. 設 $\triangle ABC$ 中，$C=90°$，D 为 AB 的中点，求証:

$$4\sin^2CD\cos^2\frac{1}{2}c=\sin^2a+\sin^2b.$$

5. 已知两直角边 $a=48°54'54''$，$b=12°16'42''$，解直角球面三

角形($C=90°$).

答: $c=50°02'53''$, $A=79°29'44''$, $B=16°06'22''$.

6. 已知一直角边 $b=64°30'09''$ 及其一邻角 $C=132°44'57''$,解直角球面三角形($A=90°$)。

答: $a=107°56'18''$, $c=135°40'57''$, $B=71°34'20''$.

7. 已知斜边 $c=60°21'19''$, 及其一邻角 $A=72°24'40''$, 解直角球面三角形($C=90°$)。

答: $a=55°56'32''$, $b=27°58'02''$, $B=32°39'23''$.

8. 已知两角 $A=42°38'51''$, $B=63°13'22''$, 解直角球面三角形($C=90°$)。

答: $a=34°31'27''$, $b=48°19'04''$, $c=56°46'49''$.

9. 已知斜边 $a=83°01'04''$, 及一直角边 $b=73°02'12''$, 解直角球面三角形($A=90°$)。

答: $C=66°20'00''$, $B=74°30'00''$, $c=65°22'56''$.

10. 已知一直角边 $a=108°41'36''$, 及其对角 $A=102°35'40''$, 解直角球面三角形($C=90°$)。

答: 有二解: $c_1=103°55'40''$, $b_1=41°19'28''$, $B_1=42°52'09''$;

$c_2=76°04'20''$, $b_2=138°40'32''$, $B_2=137°07'51''$.

11. 設已知下列条件, 求球面三角形的高:

(1) $A=104°14'08''$, $B=65°39'20''$, $C=58°25'12''$.

答: $h_a=53°08'47''$, $h_b=58°21'00''$, $h_c=65°33'48''$.

(2) $a=39°15'40''$, $b=56°49'10''$, $C=64°05'20''$.

答: $h_a=48°50'06''$, $h_b=34°41'50''$, $h_c=29°05'38''$.

12. 已知 $a=72°15'25''$, $h_a=34°40'50''$, $A=55°07'15''$, 求球面三角形的其他元素。

答: $b=95°35'58''$, $c=41°35'18''$, $B=120°59'38''$,

$C=34°52'12''$.

第五章　球面三角形的面积和球面角超

§ 1. 球面二角形的面积

在研究球面三角形的面积之前，我們先考察球面二角形的面积。所謂球面二角形，就是球面上两个大圓的半周所包圍的部分。如图 24，过直徑 AB 的两端作大圓半周 ACB，ADB，則瓜瓣形 $ACBDA$ 即为球面二角形。一般，球面二角形有优劣两个，我們所討論的是劣球面二角形。

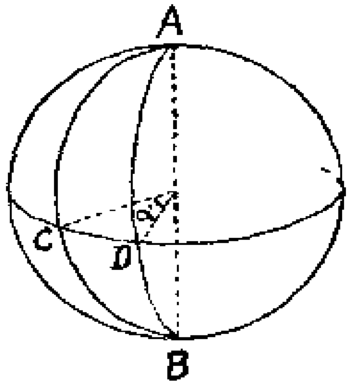


图　24.

显然，球面二角形可視为半圓周繞直徑旋轉某一角 α 所成的旋轉面(图 24)，因之，球面二角形的面积与这样的旋轉角成比例。这就是說，球面二角形 $ACBDA$ 的面积与球面面积之比等于 α 与 360° 之比，即

$$\frac{U}{4\pi r^2}=\frac{\alpha}{360^\circ},$$

这里 U 表示球面二角形的面积，r 为球的半徑。由此得出球面二角形的面积公式：

$$U=\frac{\alpha}{90^\circ}\pi r^2. \tag{1}$$

§ 2. 球面三角形的面积

設球面三角形 ABC 的面积为 S。为了导出这球面三角形的面积，对这球面三角形的每个角作球面二角形(图 25)，即对 A 角作二角形 ABA_0CA，对 B 角作二角形

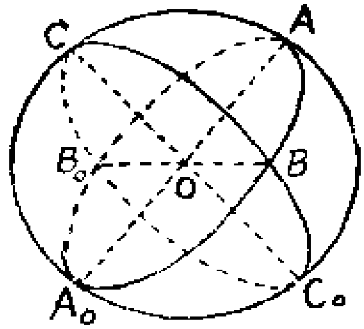


图　25.

BAB_0CB，对 C 角作二角形 CAC_0BC。于是根据上节的公式（1），有：

$$BAB_0CB=\frac{B}{90^\circ}\pi r^2=\triangle ABC+\triangle AB_0C,$$

$$ABA_0CA=\frac{A}{90^\circ}\pi r^2=\triangle ABC+\triangle A_0BC,$$

$$CAC_0BC=\frac{C}{90^\circ}\pi r^2=\triangle ABC+\triangle ABC_0.$$

将上三式相加，得

$$3\triangle ABC+\triangle AB_0C+\triangle A_0BC+\triangle ABC_0=\frac{\pi r^2}{90^\circ}(A+B+C).$$

考察 $\triangle AB_0C$ 与 $\triangle A_0BC_0$，因为它們互为对称，所以它們的面积相等（第一章 § 7 定理 V），且

$\triangle ABC+\triangle A_0BC+\triangle A_0BC_0+\triangle ABC_0=2\pi r^2$，（半球面的面积）

故 $$2\triangle ABC+2\pi r^2=\frac{\pi r^2}{90^\circ}(A+B+C),$$

即 $$S=\frac{A+B+C-180^\circ}{180^\circ}\pi r^2. \tag{2}$$

§ 3. 球面角超

在上节公式(2)中，$A+B+C$ 是球面三角形 ABC 的三內角之和，依照第一章 § 5 性質 Ⅲ，$A+B+C$ 之值必大于 180°。但我們知道，平面三角形三內角之和等于 180°，于是我們有下列的定义。

球面三角形三內角之和与平面三角形三內角之和的差，就叫做球面角超（或叫做球面剩余），习惯上用 E 来表示，即

$$E=A+B+C-180^\circ（表示度），\tag{3}$$

或 $$E=(A+B+C-180^\circ)\frac{\pi}{180}（表示弧度）. \tag{3'}$$

由此，上节的公式(2)就可写成下列形式：

$$S=\frac{E}{180^\circ}\pi r^2\ (\text{以度为单位来計算}). \qquad (2)'$$

若以秒为单位来計算，有：

$$S=\frac{E}{648000''}\pi r^2. \qquad (2)''$$

若以弧度为单位来計算，有：

$$S=Er^2. \qquad (2)'''$$

又因 1 弧度 $=\frac{180^\circ}{\pi}=206264''806=\rho''$，故公式(2)′可写为

$$S=\frac{E}{\rho''}r^2. \qquad (2)^{\text{IV}}$$

在实用上，由于我們的研究对象大都是地球上的球面三角形，这种球面三角形的边远小于地球的半徑，因之，球面角超一般仅含有秒，所以取用公式(2)″与(2)^{IV}較为适宜。

又由公式(2)‴可以看出：在同球或等球上，球面三角形的面积与球面角超成比例。

例 1. 已知球面三角形的面积为球面积的$\frac{1}{12}$，求这球面三角形的球面角超。

依題意，
$$\frac{E}{180^\circ}\pi r^2=\frac{1}{12}(4\pi r^2),$$

故
$$E=60^\circ.$$

例 2. **試証：**

$$\begin{cases}\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin\frac{E}{2}\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)}{\sin B\sin C}},\\[2ex] \cos\frac{a}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}{\sin B\sin C}},\\[2ex] \operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin\frac{E}{2}\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}}.\end{cases}$$

因为$E=A+B+C-180°$，所以$P=\frac{1}{2}(A+B+C)=90°+\frac{E}{2}$，$P-A=90°-\left(A-\frac{E}{2}\right)$，$P-B=90°-\left(B-\frac{E}{2}\right)$，$P-C=90°-\left(C-\frac{E}{2}\right)$，把这些等式代入第二章的半边公式(10)、(11)、(12)的第一式中，就得到上面的結果。

§4. 已知球面三角形的二边及夹角求球面角超的公式

由公式 $E=A+B+C-180°$ 可以看出，若已知球面三角形的三角，很容易就得出这球面三角形的球面角超。同时，由这公式也可以看出，只要知道球面三角形的任意三个元素就可求出球面角超，因为用第三章的方法，我們可以根据这任意三个元素来解算球面三角形的三个角。不过，在很多情况下，我們不必通过解算球面三角形而有直接根据已知条件来求球面角超的公式，本节和下节所讲的公式就是在測量学中常用到的公式。

$$\begin{aligned}\cos\frac{1}{2}E &= \cos\frac{1}{2}(A+B+C-180°)\\ &= \cos\left[\frac{1}{2}(A+B)-\left(90°-\frac{1}{2}C\right)\right]\\ &= \cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\left(90°-\frac{1}{2}C\right)\\ &\quad +\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\left(90°-\frac{1}{2}C\right)\\ &= \cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}C+\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}C\\ &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin^2\frac{1}{2}C+\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cos^2\frac{1}{2}C\text{①}\end{aligned}$$

①利用第二章公式(13)和(15)——达兰布尔公式。

$$=\left[\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right)\sin^2\frac{1}{2}C\right.$$

$$\left.+\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right)\cos^2\frac{1}{2}C\right]\frac{1}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\left[\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\left(\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\left(\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)\right]\sec\frac{1}{2}c,$$

即

$$\cos\frac{1}{2}E=\left[\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C\right]\sec\frac{1}{2}c. \tag{4}$$

又

$$\sin\frac{1}{2}E=\sin\left[\frac{1}{2}(A+B)-\left(90^\circ-\frac{1}{2}C\right)\right]$$

$$=\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\left(90^\circ-\frac{1}{2}C\right)$$

$$-\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\left(90^\circ-\frac{1}{2}C\right)$$

$$=\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}C-\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}C$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}C$$

$$-\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C \text{①}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\left[\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}(a+b)\right]$$

---

①利用第二章公式(13)和(15)——达兰布尔公式。

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin C}{\cos\frac{1}{2}c}2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b,$$

即 $$\sin\frac{1}{2}E=\sin C\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sec\frac{c}{2}. \tag{5}$$

用公式(4)除公式(5)，得

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{1}{2}E&=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C},\\
\text{同理：}\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}E&=\frac{\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\sin A}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c+\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos A},\\
\operatorname{tg}\frac{1}{2}E&=\frac{\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}a\sin B}{\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a+\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}a\cos B}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

因此，知道球面三角形的二边及夹角之后，就可根据这公式来求球面角超。

§ 5. 已知球面三角形的三边求球面角超的公式

已知球面三角形的三边求球面角超的公式有很多，但在测量学中最常用到的有下列两个：

I. 卡諾利 (Cagnoli) 公式

因为 $\sin C=2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C.$

$$=2\cdot\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}\cdot\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}\text{①}$$

①見第二章公式(7)和(8)。

$$=\frac{2}{\sin a\sin b}\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}.$$

把这等式代入上节的公式(5)中，便得

$$\sin\frac{1}{2}E=\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}. \qquad (7)$$

Ⅱ. 侯利尔(Lhuilier)公式

$$\operatorname{tg}\frac{1}{4}E=\frac{\sin\frac{1}{4}E}{\cos\frac{1}{4}E}=\frac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)}{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{4}(A+B-\overline{180^\circ-C})\cos\frac{1}{4}(A+B+180^\circ-C)}{2\cos\frac{1}{4}(A+B-\overline{180^\circ-C})\cos\frac{1}{4}(A+B+180^\circ-C)}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)-\sin\frac{1}{2}(180^\circ-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)+\cos\frac{1}{2}(180^\circ-C)}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)-\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A+B)+\sin\frac{1}{2}C}$$

$$\overset{①}{=}\frac{\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C-\cos\frac{1}{2}C}{\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}C+\sin\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(a+b)+\cos\frac{1}{2}c}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}C}$$

---

① 見第二章公式(13)和(15)。

$$=\frac{2\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(b+c-a)}{2\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(p-b)\sin\frac{1}{2}(p-a)}{\cos\frac{1}{2}p\cdot\cos\frac{1}{2}(p-c)}\cdot\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin(p-a)\sin(p-b)}}^{①}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}p\sin\frac{1}{2}(p-a)\sin\frac{1}{2}(p-b)\sin\frac{1}{2}(p-c)}{\cos\frac{1}{2}p\cos\frac{1}{2}(p-a)\cos\frac{1}{2}(p-b)\cos\frac{1}{2}(p-c)}},$$

即

$$\operatorname{tg}\frac{1}{4}E=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}p\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-c)}. \qquad (8)$$

§ 6. 球面三角形的面积和球面角超的計算

根据本章公式 (2)，如果知道了球面角超 E 和球半徑 r，則可計算球面三角形的面积。一般球半徑 r 是預先測定好了的（如地球半徑大約为 6370000 公尺），而球面角超 E 則可根据公式(4)、(6)、(7)、(8)直接（或間接用第三章各节的方法）求出来。

I. 已知三角

显然，这里我們所要用到的公式为

$$E=A+B+C-180°,$$

$$S=\frac{E}{648000}\pi r^2.$$

例 已知球面三角形的三角 $A=78°30'13''$；$B=32°35'16''$；$C=103°25'12''$，求球面角超 E 和面积 S。

---

①見第二章公式(9)。

E	34° 30′ 41″ $=124201''$	$\lg \frac{S}{r^2}$	$\bar{1}.77971$
$\lg E$	5.09413	$\frac{S}{r^2}$	0.60216
$\lg \pi$	0.49715		
colg 648000	4.18843	S	$0.60216\times r^2$

Ⅱ. 已知三边

試參考第三章§1中所說的理由，这里最好是利用侯利尔公式(8)来計算球面角超。

例 已知球面三角形的三边 $a=69°15'06''$, $b=120°42'46''$, $c=159°18'34''$，求 E 和 S.

$2p$	349° 16′ 26″	$\lg \operatorname{tg}\frac{1}{2}p$	1.32942	$\lg E$	5.89210
p	174 38 13			$\lg \pi$	0.49715
$p-a$	105 23 07	$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-a)$	0.11805	colg 648000	4.18843
$p-b$	53 55 27			$\lg\frac{S}{r^2}$	0.57768
$p-c$	15 19 39	$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-b)$	9.70646		
$\frac{1}{2}p$	87 19 06.5	$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-c)$	9.12892	S	$3.7817\,r^2$
$\frac{1}{2}(p-a)$	52 41 33.5	$\lg \operatorname{tg}^2\frac{1}{4}E$	0.28286		
$\frac{1}{2}(p-b)$	26 57 43.5	$\lg \operatorname{tg}\frac{1}{4}E$	0.14142		
$\frac{1}{2}(p-c)$	7 39 49.5	$\frac{1}{4}E$	54° 10′ 05″		
		E	216° 40′ 20″ $=780020''$		

Ⅲ. 已知两边及夹角

設已知球面三角形的两边 a, b 及其夹角 C，我們可以依照本章公式(6)来求 E，只是这个公式，不便于对数計算，故在实用上，常常是先用第三章 §4 的方法求出 A 和 B，再求 E。但有时也将本章公式(6)作如下的"改化"而解算 E。

将公式(6)的分子分母同时除以 $\cos\frac{1}{2}a$，則得

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C}{\cos\frac{1}{2}b+\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}.$$

令 $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\cos C,$

则 $$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E=\frac{\frac{\operatorname{tg}x}{\cos C}\sin\frac{1}{2}b\sin C}{\cos\frac{1}{2}b+\operatorname{tg}x\sin\frac{1}{2}b}=\frac{\sin\frac{1}{2}b\operatorname{tg}C\sin x}{\cos x\cos\frac{1}{2}b+\sin x\sin\frac{1}{2}b}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}b\operatorname{tg}C\sin x}{\cos\left(x-\frac{1}{2}b\right)}.$$

因此，对我們有用的公式为

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\cos C.\\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}E=\dfrac{\sin\frac{1}{2}b\operatorname{tg}C\sin x}{\cos\left(x-\frac{1}{2}b\right)}.\\ S=\dfrac{E}{648000}\pi r^2.\end{cases}$$

至于其他各种情况，如已知两角及夹边等，可用第三章各节的方法先求得球面三角形的三角，再求 E，然后求 S。这里就不必一一加以說明了。

第五章　习题

1. 已知球面二角形的面积为球面积的$\frac{1}{8}$，求夹角。答：45°。

2. 設球面三角形的面积为球面积的$\frac{1}{12}$，且这三角形的面积为球面二角形面积的三倍，試求：(1)球面二角形的面积及夹角；

(2)球面三角形的球面角超。

3. 已知球面角超为 45°，求球面三角形的面积。

4. 已知球面三角形的面积为球面积的 $\frac{1}{5}$，求球面角超。

5. 已知等边球面三角形的面积等于球面积的 $\frac{1}{4}$，試求这三角形的边与角。

6. 已知球面三角形的 $a=b=60^\circ, c=90^\circ$，求証 $\cos E=\frac{7}{9}$.

7. 設 $C=90^\circ$，試証：(1)$\sin\frac{1}{2}E=\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sec\frac{1}{2}c$;

(2)$\cos\frac{1}{2}E=\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sec\frac{1}{2}c$.

8. 設 $C=90^\circ, a=b$，試証 $\operatorname{tg}E=\frac{\sin^2 a}{2\cos a}$.

9. 証明恒等式：

$$\sin\left(C-\frac{1}{2}E\right)=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}}.$$

10. 証明：

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}c-\frac{1}{4}E\right)=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}p\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-b)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(p-c).$$

11. 測得地面上三角形的三边分别为32000公尺、43000公尺、53000公尺，取地球半徑为6400000公尺，試計算其球面角超。

答：$E=3''.46$.

12. 已知 $A=80^\circ, B=35^\circ, c=70^\circ$，球的半徑为10单位，試求这球面三角形的面积。　　答：8.7265。

13. 已知 $a=133^\circ26'19'', b=64^\circ50'53'', c=144^\circ13'45''$，試求球面角超。　　答：$200^\circ46'46''$。

14. 已知 $a=33^\circ01'45'', b=155^\circ05'18'', C=110^\circ10'$，求角超。

答：$E=133^\circ48'51''$.